1931 № 6

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК



BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

В. Г. Фесенков. Определение солнечной постоянной. ИМЕН, 1931, № 6, стр. 801.

V. Fesenkov (B. Fessenkoff). Recherches sur la constante solaire.
BAS-MN, 1931, № 6, p. 801 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Сентябрь 1931 г.

Непременный секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Начато набором в мае 1931 г. — Окончено печатанием в сентябре 1931 г.

152 (729—880) стр. (14 фиг.) + 2 табл.

Статформат $Б_5$

Ленинградский Областлит № 16283. — 10 печ. л. — Тираж 1300

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ИВАН АЛЕКСАНДРОВИЧ ЛАППО-ДАНИЛЕВСКИЙ

(1896—1931)

НЕКРОЛОГ

Составлен Н. Н. Лузиным

15 марта сего года наша Академия Наук понесла чрезвычайно тяжелую утрату: скончался в Giessen'е член-корреспондент Академии Иван Александрович Лаппо-Данилевский.

Научная жизнь и самый расцвет этого столь сильного научного дарования происходили необыкновенно интенсивно, и уже одно это обстоятельство придает исключительное значение личности И. А.

Биографические данные вкратце сводятся к следующему. И. А. родился 16 октября 1896 г. в Ленинграде. Осенью 1914 г. он окончил гимназию и поступил на Математическое отделение Физико-математического факультета Ленинградского университета, где он занимался всего лишь один год. Далее в его жизни наступает перерыв в научных занятиях и, вообще, в университетском образовании, вплоть до 1924 г., когда он восстанавливается в качестве студента Ленинградского университета. Уже в следующем 1925 г. он оканчивает университет и становится аспирантом. В эти самые годы его аспирантуры и происходит необыкновенно быстрое складывание его научной личности. Весною 1929 г. он оканчивает свой аспирантский стаж и сейчас же — с исключительным блеском — защищает свою диссертацию, в которой он излагает совершенно новую точку зрения на теорию линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами.

Одновременно с этим развитием творческой научной силы, И. А. складывается и как выдающийся преподаватель. Уже в 1925 г. он состоит преподавателем Ленинградского морского техникума, а затем становится ассистентом и профессором ряда ленинградских ВТУЗ'ов, вызывая восторженное отношение учащейся молодежи.

В 1929—1930 гг. И. А. читает как доцент специальный курс в Ленинградском университете, посвященный его новой теории. Осенью 1930 г. Наркомпрос командирует его в Германию для дальнейшего развития его теории линейных дифференциальных уравнений, сроком на 1 год. Тогда же он, по представлению академика И. М. Виноградова, Birkhoff'а и Schlesinger'а, удостаивается Рокфеллеровской премии-стипендии и, одновременно с этим, по представлению академика А. Н. Крылова, удостаивается премии Главнауки при Наркомпросе.

Во время своего краткого пребывания за границею И. А. получил ряд предложений от заграничных университетов читать циклы лекций и курсы по его изысканиям в области дифференциальных уравнений. Предложения были сделаны Парижем, Иеной и Гиссеном. За границею И. А. преимущественно был в Гиссене, где формально числился, как работающий под руководством профессора Schlesinger'а. В заграничной же командировке, когда еще не минула и половина ее, И. А. застигла кончина.

Математические дарования И. А. проявили себя очень рано: еще на гимназической скамье он выделялся своими способностями и запросами. Но его математическая сила необычайно ярко обнаруживает себя в том обстоятельстве, что несмотря на столь большой разрыв в научных занятиях, начавшийся, собственно говоря, еще в юношеском возрасте, И. А. не только смог вернуться к науке, но и развернул с исключительным блеском свое творчество — в сущности лишь в течение четырех лет — дав этим пример необычайной интенсивности мысли, длившейся до самой его кончины.

Сущность новой точки зрения И. А. на аналитическую теорию систем линейных дифференциальных уравнений состоит в следующем: хотя названная теория уже со второй половины XIX в. привлекла к себе такие выдающиеся научные силы, каковы Riemann, Fuchs, Frobenius, Mittag-Leffler, Poincaré, Hilbert, позднее Birkhoff и другие, однако она была до известной степени заведена в тупик, вследствие постройки ее на почве теории функций обычного комплексного переменного. Именно благодаря

этому слишком близкому следованию классическому комплексному переменному, почва теории была истощена и хотя далеко не все проблемы получили решение, однако исследователи начали покидать эту область.

Идея И. А. состояла в том, что надо было переменить самую точку зрения, и создать другую теорию функций, специально приспособленную к атакуемым им проблемам — именно: теорию функций матричного переменного. Действительность блестяще оправдала эти глубокие предвидения И. А.

Уже одна эта новая теория функций могла создать И. А. большую известность, так как законы функций матричного переменного оказались простыми, гармоническими и во многом аналогичными законам функций обычного комплексного переменного. Так в самых последних работах И. А. указывает на аналитическое продолжение таких функций и дает его основы. Но важнее всего оказалось то обстоятельство, что благодаря теории функций матричного переменного, прямая и обратная проблемы Poincaré и Riemann'а — по данной системе уравнений найти ее группу и по данной группе отыскать все соответствующие системы дифференциальных уравнений — впервые получили свое полное до конца решение в руках И. А., в случае регулярных систем.

Решение данное И. А. отличается своим изяществом и дает в явной форме все нужные зависимости матриц решений и матриц группы от матрицы коэффициентов системы уравнений. Но самое главное — это то, что даваемое им решение имеет совершенно алгорифмический характер и полную эксплицитность, в отличие от обычных доказательств существования.

Для случая иррегулярных систем И. А. успел дать много чрезвычайно глубоких идей и новые постановки вопросов, не могущие встретиться на обычном пути. Начатые им изыскания для иррегулярных систем в случае прямой задачи уже бросили новый свет на известные старые результаты Poincaré и Helge von Koch'а. И. А. успел дать решение и обратной задачи иррегулярных систем, правда в некоторых частных гипотезах. В заметке в «Comptes Rendus», опубликованной в январе этого года, он ищет освободиться от этих частных предположений. Здесь, к огромному несчастию для науки, застигает его кончина.

Оставленное им научное наследство в виде двух готовых к печати мемуаров и подготовленных черновых работ для теории как регулярных, так и иррегулярных систем столь важно и столь значительно, что тщательный

учёт и приведение в порядок к печати этого наследства является долгом Академии. Это тем более естественно, что в течение всей своей краткой жизни Иван Александрович оставался в сущности и автодидактом, и его идеи имеют в прошлом мало корней, по которым можно было бы восстановить его результаты.

26 апреля 1931 г.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

LES DÉTERMINATIONS DIVERSES D'UNE MATRICE RÉGULIÈRE POSSÉDANT LES SUBSTITUTIONS EXPOSANTES DONNÉES AUX POINTS SINGULIERS À DISTANCE FINIE

Par J. LAPPO-DANILEVSKIJ

(Présenté par N. Luzin, membre de l'Académie des Sciences de l'URSS)

§ **1.** Soit $Y(x)$ une matrice intégrale du système

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{j=1}^{m} \frac{YU_j}{x-a_j}, \tag{1}$$

se réduisant à la matrice identique au point $x = b$. Nous avons démontré* que si les différences des nombres caractéristiques distincts de la substitution différentielle U_j ne sont pas entières, il existe une substitution exposante W_j de la matrice régulière $Y(x)$ au point a_j, jouissant de la propriété, qu'on a la représentation:

$$Y(x) = (x - a_j)^{W_j} \overline{Y}_j(x), \tag{2}$$

où les matrices $\overline{Y}_j(x)$ et $\overline{Y}_j(x)^{-1}$ restent holomorphes par rapport à x dans un voisinage du point $x = a_j$. Nous savons que ces substitutions exposantes sont les fonctions méromorphes des substitutions différentielles

$$W_j = \Xi_j \left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix} \middle| b \right) \tag{3}$$

dont les expressions analytiques nous avons donné dans nos mémoires précédents**

* Journ. Soc. Phys.-Math. Leningr., t. II, fasc. 1 (1928), p. 123—125.
** Ibid., pp. 125—126; voir aussi Journ. Soc. Phys.-Math. Leningr., t. II, fasc. 2 (1929), p. 59.

Les substitutions exposantes sont liées aux substitutions intégrales

$$V_j = \Omega_j\left(\begin{matrix} U_1 \dots U_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| b\right) \tag{4}$$

que subit la matrice $Y(x)$, quand la variable x décrit les circuits entournant les points singuliers a_j par les relations:

$$V_j = e^{2\pi i W_j}.$$

La matrice régulière $Y(x)$ et ses substitutions différentielles

$$U_j (j = 1, 2, \dots m)$$

peuvent être regardées, comme fonctions analytiques de ses substitutions exposantes $W_1, W_2, \dots W_m$ aux points singuliers à distance finie

$$a_1, a_2, \dots a_m:$$

$$Y(x) = \Psi_b\left(\begin{matrix} W_1 \dots W_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| x\right) \tag{5}$$

$$U_j = H_j\left(\begin{matrix} W_1 \dots W_m \\ a_1 \dots a_m \end{matrix}\middle| b\right). \tag{6}$$

Dans le mémoire cité nous avons donné les représentations analytiques de certaines déterminations des fonctions (5) et (6). Le but de cet article est de construire les transformations liant *toutes les déterminations possibles* de ces fonctions. Les transformations indiquées laissent évidemment invariables les fonctions (3). Elles forment un groupe qui est un sousgroupe des transformations qui laissent invariables les fonctions (4). Ces dernières transformations ont été étudiées par M. Schlesinger.*

§ **2.** Nous avons démontré ** que si les différences des nombres caractéristiques distincts de la substitution différentielle au point à l'infini:

$$U_\infty = -\sum_{j=1}^{m} U_j \tag{7}$$

* Journ. f. reine u. angewandte Math., Bd. 141 (1912), S. 120 u. ff.
** Loc. cit.

ne sont pas entières, il existe la substitution exposante W_∞ de la matrice régulière $Y(x)$ au point à l'infini, jouissant de la propriété qu'on a la représentation:

$$Y(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty} \overline{Y}_\infty(x), \tag{8}$$

où les matrices $\overline{Y}_\infty(x)$ et $\overline{Y}_\infty(x)^{-1}$ restent holomorphes par rapport à x dans un voisinage du point $x = \infty$. A propos du *système complet* des substitutions exposantes

$$W_1, W_2, \ldots W_m, W_\infty \tag{9}$$

nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème I: *Le système complet* (9) *des substitutions exposantes, rélatif à tous les points singuliers* $a_1, a_2, \ldots a_m, \infty$, *determine d'une façon unique la matrice régulière normale* $Y(x)$ *et ses substitutions différentielles*

$$U_j (j = 1, 2, \ldots m).$$

Démonstration. Soit $Y(x)$ et $Y'(x)$ deux matrices normales au point b et possédant les substitutions exposantes $W_1, \ldots W_m, W_\infty$ aux points resp. $a_1, \ldots a_m, \infty$. On a alors les représentations:

$$Y(x) = (x - a_j)^{W_j} \overline{Y}_j(x); \quad Y'(x) = (x - a_j)^{W_j} \overline{Y}_j'(x); \qquad (j = 1, 2 \ldots m)$$

$$Y(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty} \overline{Y}_\infty(x); \quad Y'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{W_\infty} \overline{Y'}_\infty(x)$$

où les matrices

$$\overline{Y}_j(x); \quad \overline{Y}_j(x)^{-1}; \quad \overline{Y}_j'(x); \quad \overline{Y}_j'(x)^{-1}; \quad \overline{Y}_\infty(x); \quad \overline{Y}_\infty(x)^{-1};$$
$$\overline{Y'}_\infty(x); \quad \overline{Y'}_\infty(x)^{-1}$$

restent holomorphes dans un voisinage du point resp. $x = a_j$ ou $x = \infty$. Il en résulte, que

$$Y(x)^{-1} Y'(x) = \overline{Y}_j(x)^{-1} \overline{Y}_j'(x) = \overline{Y}_\infty(x)^{-1} \overline{Y'}_\infty(x); \quad (j = 1, 2 \ldots m)$$

Par suite la matrice $Y(x)^{-1}Y'(x)$ reste holomorphe dans tout le plan de la variable x et se réduit à une matrice constante. Conformement à la condition de la normalisation, cette matrice constante est la matrice identique, et on doit avoir $Y(x) = Y'(x)$.

En remarquant, que conformement à la relation (1), les substitutions différentielles U_j se trouvent complètement déterminées par la matrice régulière correspondant:

$$U_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{(a_j)} Y(x)^{-1}\frac{dY(x)}{dx}\,dx,$$

ou achève la démonstration.

§ 3. Considérons maintenant toutes les déterminations possibles de la substitution exposante W_∞, les substitutions exposantes $W_1, \ldots W_m$ étant supposé données.

Nous savons, que les substitutions integrales V_j $(j = 1, 2 \ldots m)$ et V_∞, que subit la matrice $Y(x)$, quand la variable x décrit les circuits entournant resp. les points a_j et ∞, sont liées aux substitutions exposantes correspondant par les relations:

$$V_j = e^{2\pi i W_j}; \quad V_\infty = e^{2\pi i W_\infty}.$$

Outre cela, les points singuliers étant numérotés dans un ordre convenable on a:

$$V_\infty = (V_1 \ldots V_m)^{-1}.$$

Donc, la substitution exposante au point à l'infini se trouve définie comme une fonction des substitutions exposantes aux points à distance finie:

$$W_\infty = \frac{1}{2\pi i}\lg V_\infty = -\frac{1}{2\pi i}\lg\left(e^{2\pi i W_1} \ldots . e^{2\pi i W_m}\right).$$

Supposons pour simplifier l'écriture, que les diviseurs élémentaires de la substitution intégrale au point à l'infini soient simples, de sorte qu'on a la représentation canonique:

$$V_\infty = S[\omega_1, \ldots, \omega_n]S^{-1}*$$

* Nous désignons en général par $[\omega_1, \ldots, \omega_n]$ la substitution dont les élements diagonaux sont resp. $\omega_1 \ldots \omega_n$ et tous les autres éléments sont nuls.

Toutes les déterminations possibles de la substitution exposante au point à l'infini sont alors:

$$W_\infty^{(r_1 \ldots r_n)} = S\left[\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_1 + r_1, \ldots, \frac{1}{2\pi i}\lg\omega_n + r_n\right]S^{-1},$$

où $\lg\omega_1, \ldots, \lg\omega_n$ sont les déterminations fixées des logarithmes et $r_1, \ldots r_n$ — des nombres entiers.

Conformement au théorème I le système complet des substitutions exposantes:

(10) $$W_1, \ldots, W_m, W_\infty^{(r_1 \ldots r_n)}$$

ne peut définir que la matrice régulière unique:

(11) $$Y^{(r_1 \ldots r_n)}(x)$$

et le système unique de ses substitutions différentielles:

12) $$U_j^{(r_1 \ldots r_n)}. \qquad (j=1,2,\ldots m)$$

Nous savons, que les substitutions exposantes (10) doivent être semblables aux substitutions différentielles correspondant:

$$U_1^{(r_1 \ldots r_n)}, \ldots, U_m^{(r_1 \ldots r_n)} U_\infty^{(r_1 \ldots r_n)}.$$

Donc, en vertu de la relation de Fuchs, on doit avoir pour toutes les matrices régulières (11):

$$\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_1 + r_1 + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\lg\omega_n + r_n + \sum_{j=1}^{m}(\sigma_j^{(1)} + \cdots + \sigma_j^{(n)}) = 0,$$

où $\sigma_j^{(1)}, \ldots \sigma_j^{(n)}$ sont des nombres caractéristiques de la substitution W_j. Par suite, les nombres entiers $r_1, \ldots r_n$ se trouvent toujours liés par la relation:

(13) $$r_1 + \cdots + r_n = 0.$$

Il en résulte que toutes les déterminations des fonctions (5) *et* (6), *correspondant a un système fixé des substitutions exposantes aux points à*

distance finie $W_1 \dots W_m$, *sont enfermées dans le système des matrices* (11) *et dans les systèmes des substitutions* (12), *où les nombres entiers* $r_1 \dots r_n$ *satisfont à la condition* (13).

Nous avons maintenant à établir un algorithme pour *la construction effective de toutes ces déterminations à partir d'une d'elles.*

4. Nous commençons par la démonstration du théorème suivant:

Théorème II: *La condition nécessaire et suffisante pour que les substitutions* U_j *et* U_j' $(j=1, 2, \dots, m)$ *soient des diverses déterminations des substitutions exposantes* $W_1 \dots W_m$, *peut être énoncée comme il suit: la matrice intégrale du système:*

$$\frac{dX}{dx}=\sum_{j=1}^{m}\frac{XU_j'-U_jX}{x-a_j} \tag{14}$$

se réduisant à I *pour* $x=b$, *ainsi que la matrice inverse sont formées de polynomes en* x.

Démonstration. Désignons par $Y(x)$ et $Y'(x)$ les matrices régulières, normales au point b et possédant les substitutions différentielles U_j et U_j' $(j=1, 2, \dots m)$ aux points a_j. En vertu de la relation (1) la matrice intégrale du système (14) se réduisant à I pour $x=b$ et la matrice inverse sont:

$$\begin{cases} X=Y(x)^{-1}\,Y'(x) \\ X^{-1}=Y'(x)^{-1}\,Y(x). \end{cases} \tag{15}$$

Si les substitutions exposantes $W_1, \dots W_m$ des matrices $Y(x)$ et $Y'(x)$ aux points $a_1, \dots a_m$ sont les mêmes, conformement aux représentations (2), on a:

$$X=\overline{Y}_j(x)^{-1}\,\overline{Y}_j'(x); \quad X^{-1}=\overline{Y}_j'(x)^{-1}\,\overline{Y}_j(x), \quad (j=1,2,\dots m)$$

Il en résulte, que les matrices X et X^{-1} sont holomorphes par rapport à x dans un voisinage de tout point à distance finie et sont, par suite, formées de polynomes.

Inversement, supposons que les matrices (15) sont formées de polynomes et désignons par W_j et W_j' les substitutions exposantes des matrices $Y(x)$

et $Y'(x)$ au point a_j. Ces deux matrices ont évidemment une même substitution intégrale V_j à ce point. Supposons, pour simplifier l'écriture, que les diviseurs élémentaires de la substitution V_j sont simples, de sorte qu'on a la représentatiou canonique:

$$V_j = S[\omega_1, \ldots, \omega_n] S^{-1}.$$

Les substitutions exposantes sont alors:

$$W_j = S\left[\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_1 + r_1, \ldots, \frac{1}{2\pi i}\lg\omega_n + r_n\right] S^{-1},$$
$$W_j' = S\left[\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_1 + r_1', \ldots, \frac{1}{2\pi i}\lg\omega_n + r_n'\right] S^{-1}$$

où $\lg \omega_k$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ sont les déterminations fixées des logarithmes et r_k et r_k' — des nombres entiers.

Les formules (2) et (15) donnent:

$$X = \overline{Y}_j(x)^{-1}(x - a_j)^{-W_j}(x - a_j)^{W_j'}\overline{Y}_j'(x),$$
$$X^{-1} = \overline{Y}_j(x)^{-1}(x - a_j)^{-W_j'}(x - a_j)^{W_j}\overline{Y}_j(x),$$

d'où il vient:

$$(x - a_j)^{-W_j}(x - a_j)^{W_j'} = S\left[(x - a_j)^{-r_1 + r_1'}, \ldots, (x - a_j)^{-r_n + r_n'}\right] S^{-1} =$$
$$= \overline{Y}_j(x)\, X\, \overline{Y}_j'(x)^{-1},$$
$$(x - a_j)^{-W_j'}(x - a_j)^{W_j} = S\left[(x - a_j)^{-r_1' + r_1}, \ldots, (x - a_j)^{-r_n' + r_n}\right] S^{-1} =$$
$$= \overline{Y}_j'(x)\, X^{-1}\, \overline{Y}_j(x)^{-1}.$$

Ces matrices doivent être holomorphes dans un voisinage du point a_j et, par suite, on doit avoir

$$r_1' = r_1, \ldots, \quad r_n' = r_n, \quad W_j = W_j'.$$

Il résulte du théorème démontré, que le problème du § 3 sur la construction des relations liant toute les déterminations (11) et (12) des fonctions (5) et (6) se réduit au problème suivant:

Construire les substitutions U_j', jouissant de la propriété que la matrice intégrale du système (14), *normale au point b, soit formée de polynomes, et ces polynomes mêmes, les substitutions U_j étant supposé données.*

5. Nous examinerons d'abord le cas où le dégrè des polynomes mentionnés ne surpasse l'unité de sorte que la matrice (15) est de la forme:

(16) $$X = I + (x - b)\,T,$$

où T est une matrice indépendant de x. A cet égard nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème III: *Les deux déterminations des fonctions* (5) *et* (6)

(17) $$Y(x) = Y^{(r_1 \dots r_p \dots r_q \dots r_n)}(x) \text{ et } Y'(x) = Y^{(r_1 \dots r_p + 1 \dots r_q - 1 \dots r_n)}(x),$$

(18) $$U_j = U_j^{(r_1 \dots r_p \dots r_q \dots r_n)} \text{ et } U_j' = U_j^{(r_1 \dots r_p + 1 \dots r_q - 1 \dots r_n)} \quad (j = 1, 2 \dots m)$$

sont liées par les transformations:

(19) $$Y'(x) = Y(x)\,[I + (x - b)\,T],$$

(20) $$U_j' = [I - (a_j - b)\,T]\;U_j\,[I + (a_j - b)\,T],$$

où T est une solution du système

(21) $$T \sum_{j=1}^{m} U_j - \sum_{j=1}^{m} U_j\,T = T - T \sum_{j=1}^{m} a_j\,U_j\,T$$

satisfaisant à la condition:

(22) $$T^2 = 0.$$

Démonstration. En vertu du théorème précédent, la matrice

(23) $$X = Y(x)^{-1}\,Y'(x)$$

doit être formée de polynomes. Le dégré de ces polynomes ne peut d'ailleurs surpasser l'unité. En effet, si la substitution intégrale des matrices $Y(x)$ et $Y'(x)$ au point à l'infini est:

$$V_\infty = S\,[\omega_1, \dots, \omega_n]\,S^{-1},$$

les substitutions exposantes de ces matrices au même point, conformement aux notations (10)—(12), sont

$$W_\infty = S\left[\frac{1}{2\pi i}\lg \omega_1 + r_1, \dots, \frac{1}{2\pi i}\lg \omega_p + r_p, \dots, \frac{1}{2\pi i}\lg \omega_q + r_q, \dots \frac{1}{2\pi i}\lg \omega_n + r_n\right] S^{-1},$$

$$W'_\infty = S\left[\frac{1}{2\pi i}\lg\omega_1 + r_1, \dots \frac{1}{2\pi i}\lg\omega_p + r_p + 1 \dots \frac{1}{2\pi i}\lg\omega_q + \right.$$
$$\left. + r_q - 1 \dots \frac{1}{2\pi i}\lg\omega_n + r_n\right]S^{-1}.$$

Donc on a:

$$X = \overline{Y}_\infty(x)^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{-W_\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{W'_\infty}\overline{Y'}_\infty(x) =$$
$$= \overline{Y}_\infty(x)^{-1} S\left[1, \dots, \frac{1}{x}, \dots, x, \dots, 1\right] S^{-1}\overline{Y'}_\infty(x),$$

d'où on voit, que les polynomes, formant la matrice X sont du premier dégré au plus. D'une façon analogue on conclut, que le dégré de polynomes, formant la matrice X^{-1} ne peut pas de même surpasser l'unité.

En remarquant, que les matrices X et X^{-1} réduisent à I pour $x = b$, on peut poser:

(24) $$X = I + (x - b)T,$$
$$X^{-1} = I + (x - b)\overset{*}{T}.$$

Or, on doit avoir:

$$[I + (x - b)T][I + (x - b)\overset{*}{T}] = I + (x - b)(T + \overset{*}{T}) + (x - b)^2 T\overset{*}{T} = I.$$

ce qui donne

$$\overset{*}{T} = -T; \quad T^2 = 0;$$

et

(25) $$X^{-1} = I - (x - b)T.$$

La matrice (23) satisfait au système d'équations différentielles (14). En substituant l'expression (24) dans ce système on obtient l'identité:

$$T = \sum_{j=1}^{m}\left\{\left[T + \frac{I + (a_j - b)T}{x - a_j}\right]U'_j - U_j\left[T + \frac{I + (a_j - b)T}{x - a_j}\right]\right\}.$$

Il en résulte que:

$$[I + (a_j - b)T]U'_j - U_j[I + (a_j - b)T] = 0$$

(26) $$\sum_{j=1}^{m}(TU'_j - U_jT) = I.$$

La première de ces relations, conformement à la formule (25), donne:

$$U_j' = [I - (a_j - b) T]\, U_j\, [I + (a_j - b) T].$$

En substituant cette expression dans la relation (26) et en tenant compte de la formule (22), on trouve:

$$T \sum_{j=1}^{m} U_j - \sum_{j=1}^{m} U_j T = T - T \sum_{j=1}^{m} (a_j - b)\, U_j T. \tag{27}$$

Or, il résulte des formules (22) et (26) que

$$T \sum_{j=1}^{m} U_j T = 0,$$

et l'équation (27) s'écrit précisément sous la forme (21). Le théorème est ainsi démontré.

Il est évident que si T est une solution arbitraire du système (21), satisfaisant à la condition (22), la matrice (24) est une matrice intégrale normale au point b du système (14), où les substitutions U_j' sont définies par les formules (20).

Donc, en vertu du théorème II on peut affirmer, que toute solution T du système (21), satisfaisant à la condition (22) à l'aide de formules (19) et (20) nous fournit les transformations, liant les diverses déterminations des fonctions (5) et (6), qui correspondent à un même système des valeurs des substitutions exposantes $W_1, \ldots W_m$.

§ **6.** La résolution du système (21) est fournie par le théorème suivant:

Théorème IV. *Si les diviseurs élémentaires de la substitution:*

$$U_\infty = -\sum_{j=1}^{m} U_j \tag{28}$$

sont simples, de sorte qu'on a la représentation canonique

$$U_\infty = S[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]\, S^{-1} \tag{29}$$

le système d'équations:

$$(30) \qquad T\sum_{j=1}^{m} U_j - \sum_{j=1}^{m} U_j T = T - T\sum_{j=1}^{m} a_j U_j T; \quad T^2 = 0$$

admet les $n(n-1)$ *solutions:*

$$(31) \qquad T_{pq} = \frac{\sigma_p - \sigma_q + 1}{\sum_{j=1}^{m} a_j \{S^{-1} U_j S\}_{pq}} S E_{qp} S^{-1} * \qquad p, q = 1, 2, \ldots, n;\ p \neq q,$$

où E_{kl} *est la substitution, dont tous les éléments sont nuls sauf* $\{E_{kl}\}_{kl} = 1.$*

Tous ces $n(n-1)$ *solutions à l'aide des formules* (19) *et* (20) *fournissent les transformations liant les matrices régulières* (17) *et ses substitutions différentielles* (18).

Démostration: La première des équations (30) peut être mise évidemment sous la forme:

$$(32) \qquad \begin{aligned} &[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] S^{-1} TS - S^{-1} TS [\sigma_1, \ldots, \sigma_n] = \\ &= S^{-1} TS - S^{-1} TS \sum_{j=1}^{m} a_j S^{-1} U_j S \cdot S^{-1} TS. \end{aligned}$$

Tâchons à satisfaire cette équation par une expression de la forme:

$$(33) \qquad S^{-1} TS = \lambda_{pq} E_{qp},$$

où λ_{pq} est un paramètre numérique. En substituant l'expression (33) dans l'équation (32), on obtient les n^2 equations:

$$\begin{aligned} &\lambda_{pq} \sigma_k \{E_{qp}\}_{kl} - \lambda_{pq} \sigma_l \{E_{qp}\}_{kl} = \\ &= \lambda_{qp} \{E_{qp}\}_{kl} - \lambda^2_{pq} \sum_{j=1}^{m} a_j \{E_{qp}\}_{kp} \{S^{-1} U_j S\}_{qp} \{E_{qp}\}_{ql}; \qquad k, l = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

* Nous désignons en général par $\{X\}_{kl}$ l'élément de k-ème ligne et de la l-ième colonne de la substitution X.

Sauf le cas, où $k=q$ et $l=p$, les deux côtés de ces dernières équations sont nuls. Dans le cas mentionné on a:

$$\sigma_q-\sigma_p=1-\lambda_{pq}\sum_{j=1}^{m}a_j\{S^{-1}U_jS\}_{pq}$$

ce qui donne:

$$\lambda_{pq}=\frac{\sigma_p-\sigma_q+1}{\sum\limits_{j=1}^{m}a_j\{S^{-1}U_jS\}_{pq}}.$$

Donc, la substitution (31) fournit une solution de la première des équation (30). Outre cela, si $p\neq q$, on a évidemment $T^2=0$.

Nous avons déjà remarqué, que toutes les solutions (31) fournissent les transformations (19) et (20), liant les diverses déterminations des fonctions (5) et (6). Il ne reste qu'à démontrer que ces déterminations sont précisement de la forme (17) et (18).

A cet égard nous considérons les invariants* de la substitution

$$U'_\infty=-\sum_{j=1}^{m}U'_j=-\sum_{j=1}^{m}[I-(a_j-b)T_{pq}]\,U_j\,[I+(a_j-b)T_{pq}],$$

qui sont eu même temps les invariants de la substitution exposante W'_∞ de la matrice régulière:

$$Y'(x)=Y(x)\,[I+(x-b)\,T_{pq}]$$

au point à l'infini.

Posons:

$$\sum_{j=1}^{m}(a_j-b)\,U_j=P;\qquad \sum_{j=1}^{m}(a_j-b)^2\,U_j=Q.$$

On a alors:

$$U'_\infty=U_\infty+T_{pq}P-PT_{pq}+T_{pq}QT_{pq}.$$

* X étant une substitution arbitraire aux nombres caractéristiques $\xi_1,\ldots,\xi_{1n}$, nous nommons invariants de cette substitution les fonctions numériques:

$$\iota_1(X)=\Sigma\xi_1;\ \iota_2(X)=\Sigma\xi_1\xi_2;\ldots;\ \iota_n(X)=\xi_1\cdot\xi_2\ldots\xi_n$$

Le dernier terme peut être simplifié. On a, en effet:

$$T_{pq}\,Q\,T_{pq}=\lambda^2_{pq}\,SE_{qp}\,S^{-1}\,QSE_{qp}\,S^{-1}=\lambda_{pq}\,\{S^{-1}\,QS\}_{pq}\,T_{pq}$$

$$\iota_1(QT_{pq})=\iota_1(F\lambda_{pq}\,SE_{qp}\,S^{-1})=\lambda_{pq}\,\iota_1(S^{-1}\,QSE_{qp})=\lambda_{pq}\,\{S^{-1}\,QS\}_{pq}.$$

Par suite, on a:

(34) $$T_{pq}\,QT_{pq}=T_{pq}\,\iota_1(QT_{pq})$$

et

(35) $$U'_\infty=U_\infty+T_{pq}\,P-PT_{pq}+T_{pq}\,\iota_1(QT_{pq}).$$

Abordons maintenant le calcul des invariants de la substitution (35)

En remarquant que

$$\iota_1(T_{pq}\,P)=\iota_1(PT_{pq})$$

et

$$\iota_1(T_{pq})=0,$$

on trouve immédiatement:

(36) $$\iota_1(U'_\infty)=\iota_1(U_\infty).$$

Le calcul du deuxième invariant se fait d'après la formule evidente:

(37) $$\iota_2(U'_\infty)=\frac{1}{2}[\iota_1(U'_\infty)^2-\iota_1(U'^2_\infty)].$$

Il suit des formules (22) et (34) que:

$$\begin{aligned}U'^2_\infty=U^2_\infty&+T_{pq}\,PU_\infty-PT_{pq}\,U_\infty+T_{pq}\,U_\infty\,\iota_1(QT_{pq})+\\&+U_\infty\,T_{pq}\,P+(T_{pq}\,P)^2-U_\infty\,PT_{pq}-T_{pq}\,\iota_1(P^2\,T_{pq})+\\&+(PT_{pq})^2-T_{pq}\,\iota_1(PT_{pq})\,\iota_1(QT_{pq})+U_\infty\,T_{pq}\,\iota_1(QT_{pq})+\\&+T_{pq}\,\iota_1(PT_{pq})\,\iota_1(QT_{pq}),\end{aligned}$$

ce qui donne:

(38) $$\begin{aligned}\iota_1(U'^2_\infty)=\iota_1(U^2_\infty)&+2\iota_1(U_\infty\,T_{pq}\,P)-2\iota_1(PT_{pq}\,U_\infty)+\\&+2\iota_1((PT_{pq})^2)+\iota_1(U_\infty\,T_{pq})\,\iota_1(QT_{pq}).\end{aligned}$$

Or, on a

$$\iota_1(U_\infty\,T_{pq}\,P)-\iota_1(PT_{pq}\,U_\infty)=\iota_1(P(U_\infty\,T_{pq}-T_{pq}\,U_\infty)),$$

et en remarquant, qu'en vertu de la formule (27)

$$U_\infty T_{pq} - T_{pq} U_\infty = T_{pq} - T_{pq} P T_{pq},$$

on trouve

(39) $$\iota_1(U_\infty T_{pq} P) - \iota_1(P T_{pq} U_\infty) = \iota_1(\dot{P} T_{pq}) - \iota_1((P T_{pq})^2).$$

D'un autre côté, on a:

$$U_\infty T_{pq} = \lambda_{pq} S[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] E_{qp} S^{-1}$$

et, par suite

(40) $$\iota_1(U_\infty T_{pq}) = \lambda_{pq} \iota_1([\sigma_1, \ldots, \sigma_n] E_{qp}) = 0.$$

En substituant les valeurs (39) et (40) dans l'expression (38) on trouve:

$$\iota_1(U'^2_\infty) = \iota_1(U^2{}_\infty) + 2\iota_1(P T_{pq}).$$

Mais

$$\iota_1(P T_{pq}) = \iota_1\left(\sum_{j=1}^{m} a_j U_j T_{pq} + U_\infty T_{pq} b\right) = \iota_1\left(\sum_{j=1}^{m} a_j U_j T_{pq}\right) =$$

$$= \lambda_{pq} \iota_1\left(\sum_{j=1}^{m} a_j U_j S E_{qp} S^{-1}\right) = \lambda_{pq} \iota_1\left(\sum_{j=1}^{m} a_j S^{-1} U_j S E_{qp}\right) =$$

$$= \lambda_{pq} \sum_{j=1}^{m} a_j \{S^{-1} U_j S\}_{pq} = \sigma_p - \sigma_q + 1,$$

ce qui donne

$$\iota_1(U'^2_\infty) = \iota_1(U^2{}_\infty) + 2(\sigma_p - \sigma_q + 1).$$

Enfin, en substituant cette expression dans la formule (37) et en tenant compte de la relation (36), on obtient la formule

(41) $$\iota_2(U'_\infty) = \iota_2(U_\infty) + \sigma_q - \sigma_p - 1.$$

Les formules (36) et (41) fournissent les expressions des invariants $\iota_1(U'_\infty)$ et $\iota_2(U'_\infty)$ par les invariants resp. $\iota_1(U_\infty)$ et $\iota_2(U_\infty)$. En continuant les calculs on obtient les expressions de tous les invariants $\iota_s(U'_\infty)$ par les invariants

$$\iota_s(U_\infty), \qquad s = 1, 2, \ldots, n$$

En considérant ces expressions, on arrive à la conclusion suivante: les invariants

$$\iota_1(U'_\infty),\ \iota_2(U'_\infty), \ldots, \iota_n(U'_\infty)$$

peuvent être obtenues des invariants

$$\iota_1(U_\infty),\ \iota_2(U_\infty), \ldots, \iota_n(U_\infty)$$

par le remplacement des nombres caractéristiques:

$$\sigma_p \quad \text{par } \sigma_p + 1$$

et

$$\sigma_q \quad \text{par } \sigma_q - 1,$$

tous les autres nombres caractéristiques restant les mêmes.

Il en résulte, que si l'on remplace dans les relations (19) et (20) T par T_{pq}, on obtiendra les formules qui fournissent, conformement aux notations (10)—(12), les transformations:

$$\text{de } Y^{(r_1 \ldots r_p \ldots r_q \ldots r_n)}(x) \quad \text{en} \quad Y^{(r_1 \ldots r_p+1 \ldots r_q-1 \ldots r_n)}$$

$$\text{et de } U_j^{(r_1 \ldots r_p \ldots r_q \ldots r_n)} \quad \text{en} \quad U_j^{(r_1 \ldots r_p+1 \ldots r_q-1 \ldots r_n)}.$$

Le théorème est ainsi démontré.

7. Il est évident, qu'en partant des déterminations fixées des fonctions

$$Y(x) = \Psi_b\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| x\right)$$

$$U_j = H_j\left(\begin{matrix} W_1 \ldots W_m \\ a_1 \ldots a_m \end{matrix}\middle| b\right)$$

et en repetant plusieures fois les transformations:

(42) $$Y'(x) = Y(x)[I + (x-b)T_{pq}],$$

(43) $$U_j' = (I - (a_j + b)T_{pq}]\,U_j[I + (a_j - b)T_{pq}]$$

où:

$$T_{pq} = \frac{\sigma_p - \sigma_q + 1}{\sum\limits_{j=1}^{m} a_j \{S^{-1} U_j S\}_{pq}} S E_{qp} S^{-1}; \quad p, q = 1, 2, \ldots, n \quad n \neq q$$

$$-\sum_{j=1}^{m} U_j = S[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]S^{-1};\ \{E_{qp}\}_{qp} = 1;\ \{E_{qp}\}_{kl} = 0;\ k \neq q;\ l \neq p$$

on arrivera aux déterminations arbitraires des fonctions indiquées, correspondant aux mêmes valeurs des substitutions exposantes aux points à distance finie: $W_1 \ldots W_m$.

Les transformations (42) et (43) forment évidemment les *groupes commutatifs*.

Ces transformations nous fournissent outre cela la résolution algorithmique du problème sur la construction des solutions polynomiales des systèmes d'équations différentielles de la forme (14).

И. А. ЛАППО-ДАНИЛЕВСКИЙ. РАЗЛИЧНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕГУЛЯРНОЙ МАТРИЦЫ, ИМЕЮЩЕЙ ЗАДАННЫЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ В ОСОБЫХ ТОЧКАХ, ЛЕЖАЩИХ НА КОНЕЧНОМ РАССТОЯНИИ

РЕЗЮМЕ

Автор рассматривает систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dY}{dx} = \sum_{J=1}^{m} \frac{YU_j}{x - a_j}, \tag{1}$$

где $Y(x)$ таблица n^2 функций и U_j — таблицы с постоянными численными коэффициентами. Под $Y(x)$ подразумевается та система решений, которая приводится к единичной матрице в некоторой точке $x = b$. Вблизи каждой особой точки имеет место представление

$$Y(x) = (x - a_j)^{\overline{W}_j} \overline{Y}_j(x), \qquad (J = 1, 2, \ldots, m)$$

где матрицы $\overline{Y}_j(x)$ и $\overline{Y}_j^{-1}(x)$ регулярны вблизи $x = a_j$. Матрицы $\overline{W}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ и дают показательные подстановки матрицы $Y(x)$.

Общая теория уравнений вида (1) было развита автором в его работе, помещенной в Журнале Ленинградского физико-математического общества (1928, т. II, вып. 1). Между прочим, там было дано решение задачи об определении некоторой системы вида (1) и ее решения $Y(x)$ по заданым показательным матрицам $\overline{W}_j$. В настоящей работе автор дает способ построения всех возможных систем вида (1) и их решений $Y(x)$, имеющих данные показательные подстановки $\overline{W}_j$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ÜBER DIE ABGRENZUNG DER EIGENWERTE EINER MATRIX

Von S. GERSCHGORIN

(Présenté par A. Krylov, *membre de l'Académie des Sciences)*

§ **1.** Haben wir eine Matrix

$$(1) \qquad A = \begin{Vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

wo die Elemente a_{ik} beliebige komplexe Zahlen sein dürfen, und bezeichnen wir durch z_k ($k = 1, 2, \dots n$) ihre Eigenwerte, d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} - z, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - z, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} - z \end{Vmatrix} = 0,$$

so gilt nach Bendixson und Hirsch* die Ungleichung

$$|z_k| \leqq na,$$

wo a den Maximalwert aller Zahlen $|a_{ik}|$ bedeutet.

Wir wollen im folgenden zeigen, dass man im allgemeinen viel schärfere Aussagen über die Lage der Eigenwerte machen kann.

* Sur les racines d'une équation fondamentale. Acta Mathematica, t. 25 (1900)

Wir beweisen zunächst den folgenden Satz, der einem von L. Lévy * über Matrizen mit reellen Elementen ausgesprochenen völlig analog ist.

Satz I. Sind in der Matrix (1) die Bedingungen

$$|a_{ii}| \geq \sum_k{}' |a_{ik}|, ** \qquad (i=1,\ldots n) \tag{3}$$

erfüllt (wobei das Ungleichheitszeichen mindestens für einen Wert von i gilt), so ist die Determinante Δ dieser Matrix gewiss von 0 verschieden.

Zum Beweis betrachten wir das zu der Matrix (1) zugehörige homogene Gleichungssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Sollte entgegen der gemachten Annahme $\Delta = 0$ sein, so hat das System (4) eine nichtverschwindende Lösung $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ (wobei diese Werte auch nicht alle einander gleich sein können). Sei $|x_\mu^0|$ die grösste unter den Zahlen $|x_i^0|$, so dass

$$|x_i^0| \leq |x_\mu^0| \qquad (i=1,\ldots n). \tag{5}$$

Wir betrachten nun die μ-te der Gleichungen (4), welche lautet

$$a_{\mu\mu}x_\mu^0 = -\sum_k{}' a_{\mu k}x_k^0. \tag{6}$$

Aus den Ungleichungen (3) und (5) folgt aber

$$|a_{\mu\mu}|\,|x_\mu^0| > \sum_k{}' |a_{\mu k}|\,|x_k^0|,$$

was mit der Gleichung (6) unvereinbar ist. Damit ist der Satz bewiesen.***

* Sur la possibilité de l'équilibre électrique. C. R. de l'Académie des Sciences, t. XCIII (1881).

** $\sum_k{}'$ bedeutet die Summation über alle Werte von k, ausser $k=i$.

*** Eine analoge Überlegung wurde schon früher von R. Kusmin zum Beweis des L. Lévy'schen Satzes verwendet.

§ **2.** Verwenden wir den eben gefundenen Satz zur Matrix

$$
(7) \qquad \left\| \begin{matrix} a_{11}-z, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-z, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn}-z \end{matrix} \right\|
$$

so finden wir, dass die zugehörige Determinante von 0 verschieden ist, falls die Bedingungen

$$
(8) \qquad |a_{ii}-z| \geqq \sum_k{}' |a_{ik}| \qquad (i=1,\dots n)
$$

(wo das Ungleichheitszeichen mindestens für ein i gilt) erfüllt sind.

Die geometrische Interpretation dieses Resultates führt uns auf den folgenden Satz.

Satz II. Die Eigenwerte $z_1, \dots z_n$ der Matrix (1) liegen nur innerhalb des abgeschlossenen Gebietes G, das aus allen Kreisen K_i $(i=1, \dots n)$. der z-Ebene mit den Mittelpunkten a_{ii} und zugehörigen Radien

$$
R_i = \sum_k{}' |a_{ik}|
$$

besteht.

Es kann vorkommen, dass m von den Kreisen K_i $(m=1, \dots n)$ zu einem zusammenhängenden Gebiet $H_{(m)}$ zusammenfallen, wobei alle übrigen Kreise ausserhalb dieses Gebietes liegen. Über die Verteilung der Eigenwerte unter verschiedenen so definierten Gebieten $H_{(m)}$ kann der folgende Satz ausgesprochen werden.

Satz III. In jedem Gebiet $H_{(m)}$ liegen genau m Eigenwerte der Matrix (1).

Es sei $H_{(m)}$ aus den Kreisen

$$
K_{i_1}, K_{i_2}, \dots K_{i_m}
$$

gebildet. Wir betrachten neben der Matrix A eine andere Matrix A', bei welcher alle nicht in der Diagonale stehende Elemente der Zeilen

$$
i_1, i_2, \dots i_m
$$

verschwinden, die übrigen aber denjenigen der Matrix A gleich sind. Die Matrix A' hat sicher die Eigenwerte

$$a_{i_1 i_1}, a_{i_2 i_2}, \ldots a_{i_m i_m}.$$

Nun fangen wir an die oben erwähnten verschwindenden Elemente der Matrix A' von 0 bis zu ihren Werten in der Matrix A so stetig zu verändern, dass ihre absoluten Beträge monoton wachsen. Die Kreise

$$K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots K_{i_m}$$

wachsen dabei stetig, bleiben jedoch immer von den übrigen festen Kreisen K_i der z-Ebene getrennt. Da die Eigenwerte der Matrix stetig von ihren Elementen abhängen, folgt daraus, dass in den Kreisen

$$K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots K_{i_m}$$

immer m Eigenwerte liegen müssen. Die Zahl der Eigenwerte in $H_{(m)}$ kann nicht m überschreiten, da ihre gesamte Anzahl in allen Gebieten $H_{(m)}$ genau n gleich sein muss. Damit ist unser Satz bewiesen.*

Liegen alle Kreise K_i getrennt voneinander, was durch die Bedingungen

$$(9) \qquad |a_{ii} - a_{jj}| \geq \sum_k{}' |a_{ik}| + \sum_k{}' |a_{jk}| \quad (i = 1, \ldots n;\ j = 2, \ldots n;\ j > i)$$

ausgedrückt werden kann, so sind alle Eigenwerte voneinander abgegrenzt. Da eine Gleichung mit reellen Koeffizienten nur paarweise konjugierte komplexe Wurzeln besitzen kann, folgt daraus unter anderen der folgende Satz.

Satz IV. Sind alle Elemente der Matrix (1) reel und bestehen die Relationen (9), so sind die sämtlichen Eigenwerte dieser Matrix reel.

§ **3.** In allen vorstehenden Sätzen kann man statt der Zeilen die Spalten heranziehen. Wir gelangen in dieser Weise im allgemeinen zu einem neuen System G' von Kreisen K_i', welche auch zur Abgrenzung der Wurzeln dienen können. Wir können auch mehrere solche Kreissysteme bekommen, indem wir unsere Matrix verschiedenen Transformationen unterwerfen, bei

* Der Satz bleibt auch dann richtig, wenn sich $H_{(m)}$ mit den übrigen Kreisen von aussen berührt, so dass man bei Bestimmung der Gebiete $H_{(m)}$ solche Berührungen ausser acht lassen kann.

denen das Spektrum sich nicht ändert. Man gelangt dabei im allgemeinen zu einer besseren Abgrenzung der Eigenwerte, da die letzteren nur in denjenigen Punkten liegen dürfen, welche sämtlichen Kreissystemen gehören. Genauer: es seien die Kreissysteme G_λ $(\lambda = 1, \ldots l)$ vorhanden, von denen jedes aus den Kreisen $K_i^{(\lambda)}$ $(i = 1, \ldots n)$ besteht. Wir stellen uns vor, dass die Kreise von G_λ in n_λ $(n_\lambda \leqq n)$ voneinander getrennte zusammenhängende Gebiete

$$H_1^{(\lambda)}, H_2^{(\lambda)}, \ldots H_{n_\lambda}^{(\lambda)}$$

zerfallen. Zu jedem Gebiet $H_j^{(\lambda)}$ $(j = 1, \ldots n_\lambda)$ soll $m_j^{(\lambda)}$ von den Kreisen $K_i^{(\lambda)}$ gehören. Wir bezeichnen weiter durch $S_{j_1, \ldots j_l}$ ein Gebiet, welches allen Gebieten

$$H_{j_1}^{(1)}, H_{j_2}^{(2)}, \ldots H_{j_l}^{(l)}$$

gemeinsam ist (wo j_λ bestimmte Zahlen $\leqq n_\lambda$ bedeuten). Dann liegen im Gebiet $S_{j_1, \ldots j_l}$ (es kann auch nicht zusammenhängend sein) genau $m_{j_1, \ldots j_l}$ Eigenwerte, wo $m_{j_1 \ldots j_l}$ die kleinste der Zahlen

$$m_{j_1}^{(1)}, m_{j_2}^{(2)}, \ldots m_{j_l}^{(l)}$$

ist.

Wir können diese Überlegung in folgender Weise verwenden. Es sei $H_{(m)}$ ein aus den Kreisen

$$K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots K_{i_m} \quad (m < n)$$

bestehendes zusammenhängendes Gebiet, welches von den anderen Kreisen K_i getrennt liegt. Wir unterwerfen unsere Matrix A einer Transformation mit Hilfe der Matrix $S = ||s_{ik}||$, wo

$$s_{ik} = 0 \qquad (i \neq k)$$

$$s_{ii} = \begin{cases} \alpha & (i = i_1, i_2, \ldots i_m) \\ 1 & (i \neq i_1, i_2, \ldots i_m) \end{cases}$$

Die Zahl $0 < \alpha < 1$ ist noch später genauer zu definieren. Die transformierte Matrix $B = SAS^{-1}$ entsteht aus A durch Multiplikation der Reihen $i_1, i_2, \ldots i_m$ mit α und Division der entsprechenden Spalten durch α. Wir können α so wählen, dass die Kreise

$$K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots K_{i_m}$$

des Bereiches $H_{(m)}$ verkleinert werden, ohne die übrigen Kreise K_i, welche sich dabei vergrössern, zu schneiden (es darf höchstens eine Berührung von aussen eintreten). Damit erreichen wir eine bessere Abgrenzung der in $H_{(m)}$ liegenden Eigenwerte.

Wir wollen näher auf den Fall $m = 1$ eingehen. Es sei K_i ein isoliert liegender Kreis. Die Bedingungen für α lauten dann

$$|a_{ii} - a_{jj}| \geqq \alpha \sum' |a_{ik}| + \frac{1}{\alpha} |a_{ji}| + \sum_k'' |a_{jk}|, \quad (j = 1, \ldots n; \ j \neq i) \tag{10}$$

wobei $\sum\limits_k''$ die Summation über alle k mit Ausnahme $k = i$ und $k = j$ bedeutet. Man kann, wie leicht zu ersehen ist, allen über α gestellten Bedingungen genügen, indem wir setzen*

$$\alpha = \max \frac{|a_{ii} - a_{jj}| - \sum\limits_k'' |a_{jk}| - \sqrt{(|a_{ii} - a_{jj}| - \sum\limits_k'' |a_{jk}|)^2 - 4 |a_{ji}| \sum\limits_k' |a_{ik}|}}{2 \sum\limits_k' |a_{ik}|}.$$

Wir kommen damit zum folgenden Resultat.

Satz V. Ist K_i ein isoliert liegender Kreis des Gebietes G, so liegt der zugehörige Eigenwert innerhalb des zu K_i konzentrischen kleineren Kreises K_i' mit dem Radius

$$R_i' = \alpha R_i =$$

$$= \max \frac{1}{2} \left[|a_{ii} - a_{jj}| - \sum_k'' |a_{jk}| - \sqrt{\left(|a_{ii} - a_{jj}| - \sum_k'' |a_{jk}|\right)^2 - 4 |a_{ji}| \sum_k' |a_{ik}|} \right].$$

---

* Das Zeichen max bedeutet das Maximum der nachstehenden Grösse für alle Werte von j ausser $j = i$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

STUDIEN ZUR MÖGLICHKEIT DER EINFÜHRUNG VON KOMPLEXEN GRÖSSEN IN DER RAUM-ZEIT-METRIK VON MINKOWSKI

Von H. MANDEL

(Présenté par A. Krylov, *membre de l'Académie des Sciences)*

1. Die reciproken Beinvektoren bei indefiniter Massbestimmung

Die indefinite Metrik der Minkowski'schen vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt führt* bekanntlich neben den Vektoren mit reellem absolutem Betrag (event. sind darunter die sogenannten raumartigen Vektoren gemeint) noch Vektoren ein, die einen reinimaginären Betrag haben.

Es sei $\underset{j}{e}^i$, $j = 1 \ldots 4$ die vier Grundvektoren; bilden wir nun die zu ihnen reciproken Vektoren $\overset{j}{e}^i$ gemäss den üblichen Bedingungen (die aus der positiv definiten Metrik gut bekannt sind)

(1) $$\underset{j}{e}^\nu \overset{h}{e}_\nu = \delta_j^h$$

und wählen wir als $\underset{j}{e}^i$ die vier gegenseitig orthogonale Einheitsvektoren

(2) $$\underset{j}{e}^i = \underset{j}{X}^i$$

so erhält man dabei, dass die reciproken Vektoren $\overset{j}{e}^i$ nicht alle mit den $\underset{j}{X}^i$ zusammenfallen (wie es bei positivdefiniter Metrik der Fall wäre), sondern es ergibt sich für den zeitartigen Vektor (wegen $\underset{4}{X}^\nu \underset{4}{X}_\nu = 1$ und aus (1)

(3a) $$\overset{4}{e}^i = -\underset{4}{X}^i,$$

* Unabhängig davon, ob man sich («im Kleinen») einer pseudoeuklidischen Metrik mit lauter reellen Vektorkomponenten oder einer euklidischen Metrik mit imaginären Zeitkomponenten bedient. Auch kann unsere Betrachtung im folgenden auf diese beiden Fälle angewandt werden, wenn wir auch nur den einen Fall ausdrücklich betrachten.

d. h. der zeitartige reciproke Beinvektor (den wir nun als $\overline{\underset{4}{X}}{}^i$ bezeichnen wollen) ist also dem Beinvektor $\underset{4}{X}{}^i$ entgegengesetzt gleich.

Für $j \neq 4$ soll einfach

$$\overline{\underset{j}{X}}{}^i = \underset{j}{X}{}^i \tag{3b}$$

gesetzt werden.

Die Formel (1) schreibt sich im Spezialfalle (2) folgendermassen um:

$$\underset{j}{X}{}^\nu \overline{\underset{k}{X}}{}_\nu = \delta_{jk} \tag{1a}$$

und man erhält daraus auch ferner für den Fundamentaltensor:*

$$g_k{}^i = \delta_k{}^i = \underset{\alpha}{e}{}^i \overset{\alpha}{e}{}_k = \underset{\alpha}{X}{}^i \overline{\underset{\alpha}{X}}{}_k. \tag{4}$$

Machen wir nun von den Beziehungen (3a), (3b), welche uns die Komponenten $\overline{\underset{j}{X}}{}^i$ durch die $\underset{j}{X}{}^i$ auszudrücken erlauben, Gebrauch:

$$\overline{\underset{j}{X}}{}^i = \varepsilon_j \underset{j}{X}{}^i$$

wobei die ε_j bedeuten, nach der Eisenhart'schen Bezeichnung:

$$\varepsilon_j = 1, j \neq 4$$
$$\varepsilon_4 = -1$$

so können wir die Formeln (1a) und (4) auch mit Hilfe dieser Eisenhart'schen Symbolen niederschreiben:

$$\underset{j}{X}{}^\nu \underset{h}{X}{}_\nu \underset{k}{\varepsilon} = \delta_{jh} \tag{1b}$$

$$\underset{\alpha}{X}{}^i \underset{\alpha}{X}{}_k \varepsilon_\alpha = \delta_k{}^i, \tag{4b}$$

* Hieraus ersieht man auch, dass man keineswegs zur richtigen Vektoralgebra der Raum-Zeit-Welt gelangt, indem man in den gewöhnlichen euklidischen Formeln einfach imaginäre Grössen als vierte Komponenten der Vektoren (wie z. B. $x^4 = ict$) einführt; nämlich aus dem euklidischen Ausdruck $g_{ik} = \underset{\alpha}{X}_i \underset{\alpha}{X}_k$ würde in einem Koordinatensystem $\overset{0}{K}$, wo alle $|\overset{0}{\underset{j}{X}}i| = \delta_{ij}$ sind, z. B. folgen $g_{44} = \overset{0}{\underset{4}{X}}_4 \overset{0}{\underset{4}{X}}_4 = -1$ (wegen $\overset{0}{\underset{4}{X}}_4 = i$), was aber dem euklidischen Wert $g_{44} = +1$ widerspricht.

wobei allerdings bei solcheiner Schreibweise der geometrische Sinn dieser Formeln (nämlich, dass sie einen Spezialfall der Formeln (1) und (4) darstellen) nicht mehr unmittelbar zum Ausdruck kommt. Ausserdem sieht man, dass die Ausdrücke (4) und (1a) in Bezug auf die Beinvektoren, einen wesentlichen **bilinearen** Charakter haben, wodurch die indefinite Metrik sich gerade von der gewöhnlichen euklidischen, in welcher der Fundamentaltensor aus den Beinvektoren quadratisch gebaut ist, unterscheidet.

Wir führen nun die imaginäre Zeitachse (mit $x^4 = ict$) ein.

In einem (in Bezug auf irgend ein Vierbein $\underset{j}{X^i}$) soeben definierten Koordinatensystem $\overset{0}{K}$ haben wir dann für die einzige von Null verschiedenen Komponente der Vektoren $\underset{4}{X^i}$ und $\underset{4}{\overline{X}^i}$:

$$(5)\quad \begin{cases} \underset{4}{\overset{0}{X^4}} = \underset{4}{\overset{0}{X}}_4 = 1, \quad \underset{4}{\overset{0}{\overline{X}}}_4 = \underset{4}{\overset{0}{\overline{X}}}_4 = -1 \\ \text{und} \\ \underset{j}{\overset{0}{X^j}} = \underset{j}{\overset{0}{X}}_j = \underset{j}{\overset{0}{\overline{X}^j}} = \underset{j}{\overset{0}{\overline{X}}}_j = 1, \ \text{für}\ j \neq 4. \end{cases}$$

Zusammenfassend erhalten wir also (im $\overset{0}{K}$ — Koordinatensystem):

$$(6)\quad \underset{j}{\overset{0}{\overline{X}^j}} = \underset{j}{\overset{0}{X^j}}{}^{\dagger}; \quad \underset{j}{\overset{0}{\overline{X}}}_j = \underset{j}{\overset{0}{X}}_j{}^{\dagger} \ \text{für}\ j = 1 \ldots 4^{*}$$

wo das Kreuz† das Konjugiert-Komplexe bedeutet. In irgend einem anderen Koordinatensystem sind die Komponenten der Vektoren $\underset{j}{X^i}$ und $\underset{j}{\overline{X}^i}$ durchaus

* Eine interessante Variante erhält man noch indem man statt $\underset{4}{X^i}$ den imaginären Vektor $\underset{4}{Y^i} = i\,\underset{4}{X^i}$ (mit dem reellen Betrag $\underset{4}{Y^\nu}\,\underset{4}{Y_\nu} = 1$) einführt. Für $j \neq 4$ setzen wir einfach $\underset{j}{X^i} = \underset{j}{Y^i}$. Benutzen wir wieder die imaginäre Zeitachse ($x^4 = ict$), so hat man im $\overset{0}{K}$ — Koordinatensystem: $\underset{j}{\overset{0}{Y^i}} = \underset{j}{\overset{0}{Y}}_i = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, 2, 3, 4$. In jedem anderen System sind immer alle Komponenten $\underset{j}{Y^i}$ reel, mit Ausnahme solcher, wo **nur einer** der Indices i, j, vier gleicht. Wir können nun statt $g_{ik} = \underset{\alpha}{Y_i}\,\underset{\alpha}{Y_k}$ den Ansatz $g_{ik} = \underset{\alpha}{Y_i}\,\underset{\alpha}{Y_k}{}^{\dagger}$ vorschlagen und dies würde bedeuten, dass der Fundamentaltensor in den Indices $i = 4$, $k \neq 4$ und $i \neq 4$, $k = 4$ imaginär und antisymmetrisch, in allen übrigen Indices aber reell und symmetrisch (also hermitisch) ist. Unabhängig davon, ob die Zeitachse zu den übrigen senkrecht ist (also auch bei $g_{i4} \neq 0$) besteht dann die Formel

$$g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \sum_{\mu\nu=1}^{3} g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu + g_{44} A^{4 2}.$$

nicht mehr einander konjugiert-komplex, sie können aber immer mit Hilfe einer Lorentztransformation zu einander konjugiert-komplex gemacht werden.

2. Einführung der komplexen Zeitrichtung

Der nächste naheliegende Schritt besteht nun in der Annahme, dass die Komponenten $\overset{0}{\underset{4}{X}}{}^4$ (bzw. $\overset{0}{\underset{4}{X}}{}_4$) nicht nur den rein-imaginären Wert i, sondern auch komplexe Werte (vom Betrage 1) haben können und dass auch in diesem Falle $\overset{0}{\underset{4}{\overline{X}}}{}_4$ dem konjugiert-komplexen Werte von $\overset{0}{\underset{4}{X}}{}_4$ gleich ist. Die Koordinatentransformationen können dabei als nur reell vorausgesetzt werden, sodass es dann ohne weiteres klar ist, wie man zu den Komponenten der Vektoren $\underset{4}{X}{}_i$ und $\underset{4}{\overline{X}}{}_i$ in irgend einem anderen Koordinatensystem übergehen kann.

Man gelangt somit zum Begriff einer komplexen zeitartigen Richtung, deren Einheitsvektoren durch $\underset{4}{X}{}^i$ und $\underset{4}{\overline{X}}{}^i$ dargestellt sind und den Betrag

$$\underset{4}{X}{}^\nu \underset{4}{\overline{X}}{}_\nu = \overset{0}{\underset{4}{X}}{}^4 \overset{0}{\underset{4}{\overline{X}}}{}_4 = e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = 1$$

ergeben.

Nun müssen wir uns über die physikalischen Tatsachen fragen, welche aus solcheinem komplexen Charakter der zeitartigen Richtungen folgen könnten.

Den Vektor $\underset{4}{X}{}^i$ (bzw. $\underset{4}{X}{}_i$) zerlegen wir folgendermassen in seine reellen und imaginären Bestandteile:

$$(7) \quad \begin{cases} \underset{4}{X}{}_4 = i\,|\underset{4}{X}{}_4|\,(\cos\theta + i\sin\theta) \\ \underset{4}{X}{}_k = |\underset{4}{X}{}_k|\,(\cos\theta + i\sin\theta),\; k \neq 4 \end{cases}$$

$\left(\text{wobei } \theta = \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ und führen die Bezeichnungen

$$(8) \quad \begin{cases} \underset{4}{X'}{}_4 = -\underset{4}{\overline{X}}{}_4' = i\,|\underset{4}{X}|_4 \cos\theta;\; \underset{4}{X}{}_k' = -\underset{4}{\overline{X}}{}_k' = |\underset{4}{X}{}_k| \cos\theta \\ \underset{5}{\overline{X}}{}_4 = \underset{5}{X}{}_4 = i\,|\underset{5}{X}{}_4| \sin\theta;\; \underset{5}{X}{}_k = \underset{5}{\overline{X}}{}_k = |\underset{5}{X}{}_k| \sin\theta \end{cases}$$

ein, sodass:

(7a) $$\underset{4}{X_l} = \underset{4}{X'_l} + i\underset{5}{X_l}; \quad \underset{5}{\overline{X}_l} = \underset{4}{\overline{X}_l'} + i\underset{5}{\overline{X}_l} = -\underset{4}{X_l'} + i\underset{5}{X_l} \qquad (l = 1 \ldots 4).$$

Die reciproken Vektoren

$$\underset{4}{\overline{X}_i}, \ \underset{4}{\overline{X}_i'}, \ \underset{5}{\overline{X}_i}$$

unterscheiden sich von den Vektoren

$$\underset{4}{X_i}, \ \underset{4}{X_i'}, \ \underset{5}{X_i}$$

blos dadurch, dass in den Komponenten an Stelle von φ, $-\varphi$ eingeführt ist.

Der Vektor $i\underset{5}{X_l}$ ist imaginär und deswegen soll er keine unmittelbare physikalische Bedeutung haben; vielmehr müssen aber alle die in $\underset{5}{X_l}$ quadratischen (also reellen) Ausdrücke nicht nur eine geometrische, sondern auch eine physikalische Rolle spielen.

So erhalten wir z. B. für den Fundamentaltensor:

(9) $$g_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{4} \underset{\alpha}{X_i}\,\underset{\alpha}{\overline{X}_k} = \sum_{\alpha=1}^{3} X_i \overline{X}_k + \underset{4}{X_i'}\,\underset{4}{\overline{X}_k'} - \underset{5}{X_i}\,\underset{5}{\overline{X}_k} = \gamma_{ik} - \underset{5}{X_i}\,\underset{5}{\overline{X}_k}.$$

Der in (9) definierte Tensor γ_{ik} kann keineswegs als Fundamentaltensor der vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt gedeutet werden; wohl aber können wir

(9a) $$\gamma_{ik} = g_{ik} + \underset{5}{X_i}\,\underset{5}{\overline{X}_k}$$

als 16 erste ($ik = 1 \ldots 4$) Komponenten des Fundamentaltensors eines fünfdimensionalen Raumes R_5 auffasen, wenn wir dabei die noch fehlenden (fünften) Komponenten aller fünf Beinvektoren in passender Weise wählen.

Es genügt, nämlich, zu zeigen, dass $\underset{5}{X_i}$, $i = 1 \ldots 4$ tatsächlich die kovarianten Komponenten eines fünften, zu den übrigen vier $\underset{j}{X_i}$ $(j = 1 \ldots 4)$ senkrechten, Einheitsvektor im R_5 darstellen können.

Wir machen dazu einfach von den Bedingungen des «z — Koordinatensystems» Gebrauch * und setzen:

(10) $$\underset{5}{X}^{i} = \underset{i}{X}_{5} = 0 \; (i = 1 \ldots 4); \; \underset{5}{X}_{5} = \underset{5}{X}^{5} = \underset{5}{X}^{\mu} \underset{5}{X}_{\mu} = 1.$$

Die fünften kontravarianten Komponenten der übrigen Beinvektoren bestimmen sich aus den Orthogonalitätsforderungen

$$\sum_{\mu=1}^{5} \underset{j}{X}^{\mu} \underset{5}{X}_{\mu} = 0, \; j \neq 5$$

wie folgt:

(11) $$\underset{j}{X}^{5} = - \underset{5}{X}^{5} \sum_{\mu=1}^{4} \underset{j}{X}^{\mu} \underset{5}{X}_{\mu}.$$

Damit sind bereits alle Komponenten der Tensoren im R_5 bestimmt in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der bekannten fünfdimensionalen Relativitätstheorie.

Auf diese Weise sind wir zu einer Darstellung gelangt, welche in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit (der vier Koordinaten: x^1, x^2, x^3, $x^4 = ict$) mit Hilfe des Begriffs der komplexen, zeitartigen Vektoren eine fünfdimensionale Metrik (der fünf Richtungen: $\underset{1}{X}^{i}$, $\underset{2}{X}^{i}$, $\underset{3}{X}^{i}$, $\underset{4}{X}^{i}$, $\underset{5}{X}^{i}$, wobei aber darunter nun keine Komplexen vorhanden sind), einführen lässt (ohne sich des fünften Koordinatenparameters x^5 — zu bedienen) — und dies bildet bereits offenbar die Grundlage der Zylindrizitätseigenschaft des R_5; wegen der Sonderstellung der fünften Koordinate x^5 könnte diese Eigenschaft sonst als künstlich eingeführt erscheinen.

3. Einführung des nicht-symmetrischen hermitischen Fundamentaltensors

Bis jetzt haben wir immer vorausgesetzt, dass die komplexen Komponenten des Vektors $\underset{4}{X}^{k} = [\underset{4}{X}^{k}] \, e^{i\varphi}$ alle den gleichen Phasenfaktor $e^{i\varphi}$ haben; macht man den nächsten Schritt und versehnt man auch diesen Faktor mit

* Vgl. Ztschr. f. Physik, 1927, 45, 290 und 1928, 49, 698.

einem Index «k» d. h. macht ihn von der Komponentennummer abhängig, so erhält man im Produkt

$$(12)\qquad \underset{4}{X}_k \underset{4}{X}_l = \underset{4}{X}_k' \underset{4}{X}_l' + \underset{5}{X}_k \underset{5}{X}_l + i(\underset{4}{X}_l' \underset{5}{X}_k - \underset{4}{X}_k' \underset{5}{X}_l)$$

und also auch im Ausdruck für den Fundamentaltensor, ausser dem reellen symmetrischen Teil, den wir schon früher hatten, noch einen imaginären, antisymmetrischen Bestandteil.

Über solcheinen imaginären Bestandteil des Fundamentaltensors wollen wir dieselbe Voraussetzung machen, wie im Falle des imaginären Vektors $i\underset{5}{X}_k$, nämlich, er soll keine unmittelbare physikalische (metrische) Bedeutung haben, welche nur dem reellen, symmetrischen Bestandteile zukommt. Um den Sinn des antisymmetrischen Teiles von g_{ik} hervorkommen zu lassen, müssen wir uns nun zu einer völlig neuen Frage wenden, nämlich der Frage über die Rolle der Quaternionensymbolik in der gegenwärtigen Physik. Diese Frage ist zuerst von K. Lanczos* in Verbindung mit der Dirac'schen Theorie des Elektrons erörtert worden. Gleichzeitig mit Lanczos war auch der Verfasser zu ähnlichen Überlegungen und Darstellung der Wellenoperatoren erster und weiter Ordnung in der Form von Quaternionenprodukten in einer vollkommeneren und symmetrischen Weise gekommen; diese Vervollständigungen des Lanczos'chen Verfahrens** liegen aber auf der Hand, so dass hier nicht darauf näher eingegangen werden soll und wir möchten nur einige prinzipielle Bemerkungen machen, insofern sie mit dem gegenwärtigen Thema in Verbindung stehen, oder die schon veröffentlichten Tatsachen von einem neuen Standpunkt aus klären können.

4. Schwierigkeit der Verallgemeinerung des Quaternionenbegriffs

Eine wesentliche Schwierigkeit in allen diesen Betrachtungen bildet der Übergang von der dreidimensionalen Vektor—(bzw. Tensor) Rechnung—zur vierdimensionalen. Einen der möglichen Auswege findet man in dem von Dirac eingeschlagenen (und von Eddington*** weiter ausgearbeiteten)

* K. Lanczos, Ztschr. f. Physik, 1929, 57, 447. Es handelt sich nur um die erste seiner Arbeiten und hauptsächlich um ihre erste Hälfte.

** Vgl. z. B. D. Iwanenko u. K. Nikolsky, Ztschr. f. Physik, 1930, 63, 129.

*** A. Eddington, Proc. R. Soc. London, 1928 (A), 121, 524, u. ff.

Verfahren, bei dem man statt der gewöhnlichen Quaternionen σ_k, $k = 1$, bis 4, (welche den zweireihigen Pauli'schen Matrizen entsprechen) das Doppelquaternionensystem $\sigma_k\, \rho_l$ (k, $l = 1, 2, 3, 4$) einführt, von denen man die fünf untereinander antikommutativen α_i wählen kann. Bedauerlicherweise erhält man dabei eine zuviel, denn sie erlauben es uns eine sechsdimensionale Wellengleichung zu linearisiren, während man nur mit einer fünfdimensionalen zu tun hat. Lässt man aber eine von ihnen z. B. α_5 — ganz ausser acht, so können die übrigen vier α_k den Komponenten eines Vierervektors angepasst werden, ganz ebenso, wie im Dreidimensionalen, die gewöhnliche Quaternioneneinheiten σ_k den Komponenten eines Dreiervektors.

Allerdings, wenn man sagt, dass irgendwelche physikalische Feldgrössen sich durch einen Quaternion darstellen lassen, so ist damit noch nichts über die Transformationseigenschaften der Komponenten vorausgesetzt: es können sowohl Vektoren, wie auch Halbvektoren (Spinoren) darunter gemeint sein.

5. Einführung der Quaternionen in die Weltmetrik und der Zusammenhang mit dem undefiniten Charakter der Massbestimmung

Angenommen, dass die Quaternionendarstellung der metrischen Grössen zu Grunde gelegt werden muss, so ist es auch Wünschenswert alle Operationen (und auch Transformationen) mit diesen Grössen in Form einer Quaternionenmultiplikation darzustellen, und die Multiplikation also als Grundoperation anzunehmen.

Betrachten wir als Beispiel die (innere) Multiplikation zweier Vierervektoren AB, wobei

$$A = \sum_{\mu=1}^{4} \alpha_\mu A^\mu$$

und

$$B = \sum_{\nu=1}^{4} \alpha_\nu B_\nu .$$

An der Seite des gewöhnlichen skalaren Produkts

$$\sum_{1}^{4} A^\mu B_\mu$$

ergeben sich auf diese Weise als imaginärer Bestandteil, die antisymmetrische Tensorprodukte der beiden Vektoren

$$\alpha_k \alpha_l A_k B_l$$

so dass es nicht erlaubt sein soll jedes für sich einzeln als physikalisch sinnvoll zu betrachten.

Wir schlagen hier nun einen anderen Weg ein, der sich als Folge der auf S. 758 entwickelten Gedanken ergibt.

Vor allem wollen wir nicht die Komponenten eines Vektors in Form einer hyperkomplexen Zahl vereinigen, vielmehr vereinigen wir die vier einander senkrechten Beinvektoren (von denen der eine noch komplex sein darf) in einen Quaternionenvektor, der uns vier Quaternionen, entsprechend den vier möglichen Komponenten, ergibt.

Dem zeitartigen Vektor entspricht dabei die gewöhnliche Einheit $\sigma_4 = 1$, den drei raumartigen Vektoren die drei Quaternioneneinheiten σ_1, σ_2, σ_3. Die vier Quaternionen schreiben sich also wie folgt:

$$X^k = \sum_\beta \sigma_\beta \underset{\beta}{X}^k, \qquad k = 1, 2, 3, 4. \tag{13}$$

Die Normierungs und Vertauschungsregeln der σ_k sollen hier mit denen der Pauli'schen Matrizen zusammenfallen.

Die sogenannte konjugierte Quaternion unterscheidet sich dabei dadurch, dass dort statt $\sigma_4 = 1$, $\bar{\sigma}_4 = -1$ eingesetzt werden muss.

Um die sogenannte konjugierte Quaternion zu erhalten setzen wir aber einfach in die Formel (13) statt der Grundbeinvektoren die reciproken Vektoren ein. Wir bezeichnen die zu (13) konjugierte Quaternion mit $\bar{X}^k$, also:

$$\bar{X}^k = \sum_\beta \bar{\sigma}_3 \underset{\beta}{X}^k = \sum_\beta \sigma_\beta \underset{\beta}{\bar{X}}^k, \qquad k = 1, 2, 3, 4. \tag{14}$$

Dieses Ergebnis zeigt uns, dass der indefinite Charakter der Massbestimmung der Raum-Zeit-Welt gerade mit der Möglichkeit der Quaternionendarstellung der Vierervektorenmetrik am engsten verbunden ist.

Diese Formeln gelten ebenso gut im Falle der Metrik mit negativen Determinanten der g_{ik}, wie auch im Falle der positiven Determinanten

und imaginären Zeitkomponenten. Für den letzteren Fall erhalten wir im $\overset{0}{K}$-Koordinatensystem ähnlich den Formeln (6):

$$\overline{\overset{0}{X}}{}^k = \overset{0}{X}{}^k = \sigma_k, \quad k \neq 4$$

$$\overline{\overset{0}{X}}{}^4 = -\overset{0}{X}{}^4 = -i\sigma_4 = -i$$

also zusammenfassend

$$\overline{\overset{0}{X}}{}^k = \overset{0}{X}{}^{\dagger k}, \tag{15}$$

für $k = 1$ bis 4.

Der konjugierte Quaternionenvektor (= dem reciproken Quaternionenvektor) fällt also mit den konjugiert komplexen Werten des Quaternionenvektors in diesem Koordinatensystem zusammen.

6. Quaternionendarstellung des Fundamentaltensors. Metrische Struktur des Wellenoperators erster und zweiter Ordnung in der Dirac'schen Theorie des Elektrons

Die obigen Ausführungen können wir nun zu einer neuen Darstellung des Fundamentaltensors benutzen.

Wir definieren nämlich diejenigen Quaternionen, welche aus einer Multiplikation der Quaternionenvektoren entstehen, als fundamentalen Quaternionentensor:

$$g_{ik} = X_i \overline{X}_k, \qquad (i, k = 1 \ldots 4) \tag{16}$$

oder ausführlicher:

$$\begin{aligned} g_{ik} = {} & \underset{\alpha}{X_i}\, \underset{\alpha}{\overline{X}_k} \\ & + \sigma_1 (\underset{1}{X_k}\, \underset{4}{X_i} - \underset{1}{X_i}\, \underset{4}{X_k} + i\, \underset{2}{X_i}\, \underset{3}{X_k} - i\, \underset{2}{X_k}\, \underset{3}{X_i}) \\ & + \sigma_2 (\underset{2}{X_k}\, \underset{4}{X_i} - \underset{2}{X_i}\, \underset{4}{X_k} + i\, \underset{3}{X_i}\, \underset{1}{X_k} - i\, \underset{3}{X_k}\, \underset{1}{X_i}) \\ & + \sigma_3 (\underset{3}{X_k}\, \underset{4}{X_i} - \underset{3}{X_i}\, \underset{4}{X_k} + i\, \underset{1}{X_i}\, \underset{2}{X_k} - i\, \underset{1}{X_k}\, \underset{2}{X_i}) \end{aligned}$$

und dies bedeutet, dass neben dem gewöhnlichen symmetrischen Fundamentaltensor, der hier als reeller Teil hervorkommt noch die mit den hyper-

komplexen Einheiten σ_1, σ_2, σ_3 multiplizierten antisymmetrischen Tensoren auftreten, welche das sogenannte magnetische Moment des Elektrons bedingen.

Einen beliebigen gewöhnlichen Vektor V^i kann man mit dem Quaternionenvektor X_i multiplizieren und man erhält nach einer Summation über i die Quaternion $V = V^\mu X_\mu$, welche die Gesamtheit der Beinkomponenten von V^i darstellt (von denen die vierte im allgemeinen noch komplex sein kann).

Betrachten wir als Beispiel einer Anwendung den quantenmechanischen Operator des Impulsvektors

$$P_i = \partial_i - \frac{2\pi i}{h} e \varphi_i;$$

wir können den Quaternionenoperator $\overline{P} = X^\mu P_\mu$ bilden, in dem auch $P_5 = m$ als Imaginärteil der vierten Beinkomponente dieses Vektors erscheinen kann. Allerdings, muss hier diese imaginäre Komponente P_5 — eine vierdimensionale Invariante sein. P — stellt dann den linearen Wellenoperator der Dirac'schen Theorie des Elektrons dar. Die Wellenfunktionen sind dabei auch in einer (komplexen) Quaternion Ψ zusammengefasst, sodass das ganze System der Dirac'schen Gleichungen in Form eines Quaternionenprodukts

$$P\Psi = 0 \tag{17}$$

geschrieben werden kann.*

Wir wollen nur noch den Übergang zu Wellengleichungen zweiter Ordnung etwas näher untersuchen. Es genügt, nämlich, dafür den Operator P mit der konjugierten Quaternion $\overline{P}$ (welche zugleich die kovarianten Beinkomponenten des Vektors P^i darstellt) zu multiplizieren; ausführlich geschrieben heisst es:

$$\left(\sum_{\beta=1}^{3} \sigma_\beta \underset{\beta}{P} + \underset{4}{P}\right)\left(\sum_{\beta=1}^{3} \sigma_\beta \underset{\beta}{P} - \underset{4}{P}\right). \tag{18}$$

* Mit Hilfe der fünfdimensionalen Verallgemeinerung des Quaternionensystems, wobei neben den vier Einheiten $j_4 = 1, j_1, j_2, j_3$ noch j_5 mit der Eigenschaft $j_5 j_k = j_k j_5 = 0$ $(k \neq 5)$ angenommen wird, was der bekannten Orthogonalität des fünften Beinvektors zu allen Raum-Zeit-Vektoren entspricht, können allerdings gleiche Resultate erziehlt werden.

Wegen der Antikommutativität der σ_k ergibt (18) in der vierten Zeile

$$\left(\sum_{\beta=1}^{3} P_\beta^2 - P_4^2\right)\Psi = 0. \tag{19}$$

Im Falle einer Anwesenheit des Massengliedes P_5, wollen wir die vierte Beinkomponente als komplex auffassen, entsprechend dem komplexen Charakter der Zeitrichtung. In der komplexen Ebene der Zeitrichtung können zwei zu einander senkrechte Einheitsvektoren eingespannt werden, welche durch zwei neue Einheiten ρ_3 und ρ_1 (wobei $\rho_3 \rho_1 = -\rho_1 \rho_3$) dargestellt sind. Die drei räumlichen Einheiten σ_1, σ_2, σ_3 und die beiden Zeiteinheiten ρ_3 und ρ_1 kommutieren übereinander.

Wir erhalten auf diese Weise, dass

$$P_4^2 = (\rho_3 P_4' + \rho_1 P_5)^2 = P_4'^2 + P_5^2 \tag{20}$$

und (19) erhält somit die erwünschte Gestalt einer fünfdimensionalen Wellengleichung.

Fassen wir nun die σ_k, ρ_l — als Dirac'sche vierreihige Matrizen auf, so stellen die Gl. (17) genau die mit ρ_3 multiplizierte Dirac'schen Gleichungen in ihrer gewöhnlichen Form dar.

Wir können uns hier von neuem überzeugen, dass die Anwesenheit des Massengliedes auf eine neue Art der Komplexstruktur der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit hinweist.

Schreiben wir nämlich das System der Dirac'schen Gleichungen mit Hilfe von nur zweireihigen Matrizen σ_k' auf:

$$(21)\quad \begin{cases} \text{a)} & \left(\sum_1^3 \sigma_k' P_k + P_4\right)\psi_1 - imc\,\psi_2 = 0 \\ \text{b)} & \left(\sum_1^3 \sigma_k' P_k - P_4\right)\psi_2 - imc\,\psi_1 = 0 \end{cases}$$

so sehen wir, dass bei der Vereinigung der beiden Systeme (21a) und (21b) die Notwendigkeit eines Überganges zu den vierreihigen Matrizen σ_k, ρ_l nur durch das Massenglied hervorgerufen wird.

Von unserem Standpunkte aus könnte man es also vielleicht etwas verständlicher machen, warum in der Dirac'schen Theorie des Elektrons von den sechs Matrizen σ_k, ρ_k ($k = 1, 2, 3$) (und also auch von den fünf gegenseitig kommutativen α-Matrizen)—notwendigerweise eine physikalisch bedeutungslos ist und man tatsächlich nur mit den 3 Raum-Matrizen σ_k und mit den 2 Zeit-Matrizen ρ_3 und ρ_1 auskommen kann.

Leningrad. 1930.

Г. А. МАНДЕЛЬ. ЭТЮДЫ К ВОПРОСУ О ВОЗМОЖНОСТИ ВВЕДЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ВЕЛИЧИН В ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ МЕТРИКЕ МИНКОВСКОГО

РЕЗЮМЕ

1. *Обратные единичные векторы в индефинитной метрике* — отличаются от основных единичных векторов. Напр., четвертый обратный

$$\overline{\underset{4}{X}}^{i} = -\underset{4}{X}^{i}.$$

Отсюда следует, что выражения

$$\delta_{jh} = \underset{j}{X}^{\nu}\,\overline{\underset{h}{X}}_{\nu}$$

и

$$\delta_{k}^{i} = \underset{\alpha}{X}^{i}\,\overline{\underset{\alpha}{X}}_{k},$$

а также

$$g_{ik} = \underset{\alpha}{X}_{i}\,\overline{\underset{\alpha}{X}}_{k}$$

составлены из единичных векторов не квадратично (как в положительной метрике) а билинейно. В специальной координатной системе составляющие $\overline{\underset{4}{\overset{0}{X}}}^{i}$ представляют комплексно-сопряженные значения $\underset{4}{\overset{0}{X}}^{+i}$ компонент $\underset{4}{\overset{0}{X}}^{i}$, причем обычно компоненты $i = 1, 2, 3$ — вещественные, а $i = 4$ — чисто мнимые.

2. Введение временнообразных комплесных направлений — при сохранении условия

$$\overset{0}{\underset{4}{X}}{}^i = \overset{0}{\underset{4}{X}}{}^i +$$

при чем

$$\underset{4}{X}{}^i = \underset{4}{X}{}^{i'} + i \underset{5}{X}{}^i,$$

где

$$\underset{4}{X}{}^{i'} \text{ и } \underset{5}{X}{}^i$$

вещественны.

Отсюда получается четырехмерное многообразие обладающее пятью взаимно-перпендикулярными направлениями

$$\underset{1}{X}{}^i, \underset{2}{X}{}^i, \underset{3}{X}{}^i, \underset{4}{X}{}^{i'}, \underset{5}{X}{}^i$$

и соответствующий метрический тензор

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + \underset{5}{X}{}_i \underset{5}{X}{}_k.$$

Так наз. цилиндричность R_5 не постулируется, а получается таким образом как следствие комплексности направления $\underset{4}{X}{}^i$.

3. Введение несимметричного Эрмитового фундаментального тензора — получается как следствие комплексности $\underset{4}{X}{}^i$ и имеет целью дать геометрическое обоснование антисимметричной части $g_{[ik]}$ представляющей собою (ср. H. Mandel, Ztschr. f. Phys., 54, 569, 1929) тензор магнитного момента электрона по теории Дирака.

К. Ланчос и автор независимо друг от друга дали выражение уравнений Дирака в кватернионах.*

4. Трудности (релативистского) обобщения кватернионов, в котором часть соответствующая направлению $\underset{5}{X}{}^i$ (напр., члену с массой в уравнениях Дирака) должна также относиться к остальной четырехмерной части, как в обычных кватернионах так наз. скалярная часть относится к трехмерной векториальной. Дирак обходит эту трудность своей системой двух кватер-

* Заметим здесь еще раз (ср. Ztschr. f. Phys. 60, 793, 1930), что Ланчос к сожалению стремился с помощью квартернионов придать уравнениям Дирака тензориальную форму и свойства, тогда как автор видел смысл введения кватернионов в том, что они не только позволяют сохранить трансформационные свойства спиноров, но и представляют аппарат для простейшего выражения этих свойств и в то же время, с другой стороны, ближайшим образом связаны с индефинитной, несимметричной метрикой волнового оператора, как это видно из настоящей работы (§ 5).

нионов ρ и σ, недостаток которой в том, что она содержит одно лишнее (шестое) измерение (его матрица α_5). Автор пользовался пятимерными кватернионами с $j_4 \, j_k = 0$.

В настоящей работе указывается на другую возможность « двойной комплексности», т. е. кроме четырехмерной комплексности пространства-времени (кватернион σ) можно воспользоваться еще упомянутою (§ 2) (двухмерной) комплексностью временных направлений (ρ_1 и ρ_3), что вместе и дает искомую линеаризацию пятимерного (содержащего массу) волнового уравнения (см. также § 6).

5. *Введение кватернионов в метрику мира обусловлено ее индефинитностью.* Строится кватернионный единичный вектор, компонентами которого являются четыре кватерниона

$$X^k = \sum_\beta \sigma_\beta \underset{\beta}{X^k},$$

при $k = 1, 2, 3, 4$. Вследствие индефинитности можно особо не вводить сопряженного кватерниона, а в качестве такового взять «обратный кватернионный единичный вектор»

$$\overline{X}^k = \sum_\beta \sigma_\beta \underset{\beta}{\overline{X}^k}.$$

6. *Фундаментальный кватернионный тензор* $g_{ik} = X_i \overline{X}_k$ (имеет 16 компонент); его временная часть представляет обычный метрический тензор

$$g_{ik} = \sum_\alpha \underset{\alpha}{X_i} \underset{\alpha}{\overline{X}_k},$$

а пространственная — антисимметричные тензоры обуславливающие спин.

Метрическая структура оператора I порядка Дираковой теории электрона ($P = X^\mu P_\mu$, где P_k обычные компоненты оператора импульса) *и II порядка* ($P \, \overline{P}$).

Таким образом уравнения Дирака имеют вид: $P\Psi = 0$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles — Отделение математических и естественных наук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ВЕЛИЧИН (ПРОГИБОВ, МОМЕНТОВ И Т. Д.) ПОМОЩЬЮ СПЕЦИАЛЬНЫХ МЕТОДОВ, ВЫРАБОТАННЫХ ДЛЯ СНИЖЕНИЯ МАЖОРАЦИЙ ЭТИХ ВЕЛИЧИН

Н. М. КРЫЛОВА и Н. Н. БОГОЛЮБОВА

(*Доложено академиком* Н. М. Крыловым *в апрельском заседании ОМЕН 1931 г.*)

Подчисление мажораций ошибок n-го приближения при применении целого ряда методов приближенного интегрирования (метода вариационного алгоритма, метода наименьших квадратов и его обобщений, метода обобщенного гармонического анализа и т. д.) основан, как известно,* на предварительном ограничении максимумов интеграла, а также и его производных, для рассматриваемой дифференциальной системы.

Ввиду того однако, что в выражения формул для технического рассчета входят значения вышеупомянутых максимумов, вопрос об ограничении их и об установлении для них наименее мажорированных формул приобретает особое значение и должен быть поэтому трактован самостоятельно.

Настоящая статья представляет собою резюме монографии, содержащей изложение методов выработанных авторами для ограничения вышеупомянутых максимумов в применении к дифференциальной системе встречаемой при исследовании балки лежащей на упругом основании, причем вопрос ставится о получении наиболее приемлемых с практической точки зрения мажораций для прогибов и моментов, т. е. о наименее мажорированном

* См. N. Kryloff. Sur la solution approchée des problèmes fondamentaux de la Physique mathématique etc. BAS-PhM, 1929, № 5, где даются библиограф. указания

ограничении интеграла, а также второй производной интеграла, дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{dx^2}+ky=q,\ (k>0), \tag{1}$$

при одном из следующих граничных условий:

а) $y\ (0)=y\ (l)=y'\ (0)=y'\ (l)=0$ (защемленная концами балка),
б) $y''(0)=y''(l)=y'''(0)=y'''(l)=0$ (свободно лежащая балка),
в) $y\ (0)=y\ (l)=y''\ (0)=y''\ (l)=0$ (шарнирно опертая по концам балка).

Совершенно ясно, что вышеупомянутые максимумы, вообще говоря, являются весьма сложными функционалами коэффициентов рассматриваемой дифференциальной системы и потому в общем случае определение этих максимумов в точном виде является вопросом по меньшей мере столь же сложным как и нахождение в точном виде самого интеграла.

Надлежит поэтому поставить задачу об определении искомых максимумов с известным «запасом прочности», т. е. о подчислении мажораций, которым следует придать форму приемлемую для вычислений.

При этом нельзя упускать из виду, что всякая мажорационная формула дает для искомой величины значение бо̀льшее чем последняя имеет на самом деле и процентное увеличение вообще говоря колеблется в широких пределах в зависимости от свойств коэффициентов рассматриваемой дифференциальной системы, а потому необходимо также построить процессы позволяющие снижать степень мажорации, дабы при достаточно большом числе операций получать приемлемые с технической точки зрения значения для искомых максимумов.

Принимая все вышесказанное во внимание оказалось возможным установить для максимальных значений прогибов и моментов, т. е. для максимума интеграла $y(x)$ и его второй производной, нижеуказанные ограничения выведенные в предположении отсутствия сосредоточенной нагрузки (далее будут указаны здесь ограничения имеющие место и для этого случая), т. е. когда функцию $q(x)$ можно считать от квадрата интегрируемой, и для случая граничных типа (в)

$$\max|y|\leq\frac{EI_{\max}\pi^4}{EI_{\max}\pi^4+kl^4}\max|F|+ \tag{2}$$

$$+\frac{kl^8}{EI_{\min}(2\pi)^4+kl^4}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{l}\int\limits_0^l q^2\,dx}}{EI_{\min}(\pi)^4+kl^4}$$

(3)
$$\max|EIy''|\leqq\max\left|\overline{\overline{q}}-\frac{\lambda_1 k}{\lambda_1+k}\,\overline{\overline{F}}\right|+$$

$$+\frac{k^2 l^4\left(\frac{\pi^4 EI_{\min}}{l^4}\right)^{-\frac{3}{8}}(EI_{\max})^{\frac{3}{8}}}{\pi^4 EI_{\min}+kl^4}\cdot\frac{\sqrt{\int\limits_0^l q^2\,dx}}{\left(\frac{2\pi}{l}\right)^4 EI_{\min}+k},$$

где F удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\left(EI\frac{d^2F}{dx^2}\right)}{dx^2}=q$$

при соответствующих граничных условиях и где

$$\overline{\overline{q}}=\int\limits_0^l G(x,\xi)\,q(\xi)\,d\xi;\qquad G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{x}{l}(l-\xi), & 0\leqq x\leqq\xi\\ \frac{\xi}{l}(l-x), & \xi\leqq x\leqq l.\end{cases}$$

$$\overline{\overline{F}}=\int\limits_0^l G(x,\xi)\,F(\xi)\,d\xi:$$

Для вычисления, т. е. для ограничения искомых максимумов, можно пользоваться также в некоторых случаях вариантами метода последовательных приближений, для каковой цели, согласно основной идее метода последовательных приближений необходимо предварительно подчислить функции

$$F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_n,\ \ldots,$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{d^2\left(EI\frac{d^2F_n}{dx^2}\right)}{dx^2}=F_{n-1},\qquad n=1,2,\ldots$$

а также соответствующим граничным условиям одного из вышеупомянутых типов (а), (б), (в).

Обычный метод последовательных приближений приводит к формуле

$$Y = F - kF_1 + k^2 F_2 + \ldots + (-1)^m k^{m-1} F_{m-1} + R_m, \tag{4}$$

где для остатка R_m можно установить, напр., такое ограничение

$$|R_m| \leq \frac{1}{l} \int_0^l |q|\, dx \left[4 + l \max \left| \frac{\partial}{\partial x} \log EI \right| \right] \sum_1^\infty \frac{k^m}{\lambda_n{}^m (\lambda_n + k)}, \tag{5}$$

где соответствующие рассматриваемой дифференциальной системе характеристические числа λ_n удовлетворяют неравенствам

$$\gamma_n \frac{EI_{\min}}{l^4} \leq \lambda_n \leq \gamma_n \frac{EI_{\max}}{l^4},$$

причем в случае граничных условий типа (а) и (б)

$$\gamma_1 = (4.73)^4, \quad \gamma_2 = (7.8532)^4; \quad \gamma_n = \left(\frac{2n+1}{2} \pi \right)^4, \; n = 3, 4, \ldots,$$

а в случае граничных условий типа (в)

$$\gamma_n = n^4 \pi^4.$$

Формулы получаемые в результате применения тех или иных методов приближенного интегрирования могут также служить для установления ограничений максимальных значений прогибов и моментов. Так напр., формула (4) приводит к следующим ограничениям для максимальных значений прогибов

$$\max |y| \leq \max |F - kF_1 + k^2 F_2 + \ldots + (-1)^m k^{m-1} F_{m-1}| + \varepsilon, \tag{6}$$

где

$$\max |R_m| \leq \varepsilon$$

и моментов

$$\max |EIy''| \leq \max |EIF'' - EIkF_2'' + \ldots + (-1)^m k^{m-1} EIF_{m-1}'') + \eta, \tag{7}$$

где

$$\eta \leq \left[4 + l \max \left| \frac{\partial}{\partial x} \log EI \right| \right] \frac{1}{l} \int_0^l |q|\, dx \cdot \sum_1^\infty \frac{k^m \sqrt{\lambda_n EI_{\max}}}{\lambda_n^{m-\frac{1}{2}} (\lambda_n + k)}. \tag{8}$$

Вышеприведенные формулы (6), (7), как это ясно из (5) и (8) пригодны не только для случая распределенных нагрузок, но, очевидно, также и для сосредоточенных нагрузок $p_1, p_2, p_3 \dots p_r$, в каковом случае надлежит лишь в формулу (5) вместо

$$\int_0^l |q|\, dx$$

подставить

$$\int_0^l |q_{\text{расп.}}|\, dx + |p_1| + |p_2| + \dots + |p_r| .$$

Процесс последовательных приближений при наличии добавочного ограничительного условия

$$\int_0^l q\, \varphi_1\, dx = 0$$

является, как известно, сходящимся лишь при значениях константы k меньших первого характеристического числа λ_1 соответствующего рассматриваемой дифференциальной системе (1). Приводя же исходное дифференциальное уравнение к виду, где вторая часть удовлетворяет соотношениям

$$\int_0^l q\, \varphi_i\, dx = 0, \qquad i = 1, 2, \dots s$$

убеждаемся, что процесс последовательных приближений будет сходящимся при значениях $k < \lambda_{s+1}$. Подобное приведение всегда может быть достигнуто если вычислив предварительно по какому-либо способу (напр., путем соответствующего обобщения методы Греффе) первые s характеристических чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_s$ отвечающих рассматриваемой дифференциальной системе, мы введем в рассмотрение следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$(9) \qquad \frac{1}{\lambda_i + k} = \sum_{j=1}^{s} A_j \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^j, \qquad i = 1, 2 \dots s,$$

всегда разрешимую в тех случаях когда характеристические числа различны, что в данном случае имеет место, причем числа эти могут быть вычислены с любой степенью точности.

Полагая

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{s} A_j F_{j-1}(x)$$

и

$$z = y - \varphi,$$

получаем для z при рассматриваемых граничных условиях такое дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\left(EI\frac{d^2 z}{dx^2}\right)}{dx^2} + kz = \Phi, \tag{10}$$

где вторая часть Φ удовлетворяет соотношению

$$\int_0^l \Phi\, \varphi_i\, dx = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots s.$$

В результате применения метода последовательных приближений имеют место такие формулы

$$z = z_0 - kz_1 + k^2 z_2 - \ldots + (-1)^m k^{m-1} z_{m-1} + R_m,$$

где

$$|R_m| \leq \left[4 + l \max\left|\frac{\partial}{\partial x}\log EI\right|\right]\frac{1}{l}\int_0^l |\varphi|\, dx \cdot \sum_{s+1}^{\infty} \frac{k^m}{\lambda_n{}^m(\lambda_n + k)},$$

а также

$$EIz'' = EIz_0'' - EIkz_1'' + EIk^2 z_2'' - \ldots + (-1)^m k^{m-1} EIz''_{m-1} + EIR_m'',$$

где

$$|EIR_m''| \leq \left[4 + l \max\left|\frac{\partial}{\partial x}\log EI\right|\right]\frac{1}{l}\int_0^l |\Phi|\, dx \sum_{s+1}^{\infty} \frac{k^m\sqrt{\lambda_n EI_{\max}}}{\lambda_n{}^m(\lambda_n + k)}.$$

причем z_m удовлетворяют рассматриваемым граничным условиям, а также таким дифференциальным соотношениям (последовательные приближения)

$$\frac{d^2\left(EI\frac{d^2 z_m}{dx^2}\right)}{dx^2} = z_{m-1}, \qquad m = 0, 1 \ldots; \quad z_{-1} = \Phi.$$

Выше данные формулы представляют действительно такой вариант последовательных приближений при помощи которого достигается сходи-

мость процесса для значений константы $k < \lambda_{s+1}$, причем можно также установить и показать на примерах, что если

$$\int_0^l q\varphi_{s+1}\,dx \neq 0 \text{ и } K > \lambda_{s+1},$$

то процесс будет расходящимся.

В частном случае при $s = 1$ получаются формулы рассмотренные акад. А. Н. Крыловым в его недавно появившейся монографии «О расчете балок лежащих на упругом основании» (изд. Академии Наук СССР, 1930).

Для установления наиболее приемлемых ограничений для максимальных значений прогибов и моментов можно применять еще один метод, которому приличествует наименование метода последовательного снижения мажораций.

Исходя для этого, например, из довольно грубого, но легко получаемого и простого ограничения для прогиба

$$\text{(11)} \qquad \max|y| \leqq H_1 \sqrt{\frac{1}{l}\int_0^l q^2\,dx},$$

где

$$\text{(12)} \qquad H_1 \leqq \sqrt{4 + l\max\left|\frac{\partial}{\partial x}\log EI\right|}\sqrt{\sum_1^\infty \frac{l^8}{(EI_{\min}\gamma_n + kl^4)^2}},$$

совершаем замену переменных по формуле

$$\text{(13)} \qquad y = F + A\Psi + u,$$

где Ψ — некоторая легко вычислимая функция удовлетворяющая рассматриваемым граничным условиям. Тогда для функции получаем дифференциальное уравнение

$$\text{(14)} \qquad \frac{d^2\left(EI\frac{d^2u}{dx^2}\right)}{dx^2} + ku = D(x) = -(kF - A\theta),$$

где

$$\theta = -\left\{\frac{d^2\left(EI\frac{d^2\Psi}{dx^2}\right)}{dx^2} + k\Psi\right\}$$

и из (13) имеем ограничение

$$\max|y| \leqq \max|F + A\Psi| + \max|u|.$$

Пользуясь теперь для ограничения max $|u|$ вышеуказанной «неточной» формулой (11), имеем

$$(15) \qquad \max|y| \leqq \max|F + A\Psi| + H_1 \sqrt{\frac{1}{l}\int_0^l (kF - A\theta)^2\,dx}.$$

Можно легко показать, что мажорация этой последней формулы будет пропорциональна интегралу

$$\sqrt{\int_0^l [kF - A\theta]^2\,dx},$$

следовательно для снижения мажорации доставляемой формулой (15) надлежит определить находящийся в нашем распоряжении коэффициент A исходя из условия обращения в минимум интеграла

$$\int_0^l [kF - A\theta]^2\,dx.$$

откуда имеем

$$A = \frac{\int_0^l kF\theta\,dx}{\int_0^l \theta^2\,dx}.$$

Вышеизложенный метод обобщается очевидно и на общий случай когда в рассмотрение вводится не одна функция Ψ, но последовательность функций

$$\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n \ldots,$$

удовлетворяющих граничным условиям и образующих замкнутую систему.

Тогда вместо (15) следует пользоваться более общей формулой вида

$$(16) \qquad \max|y| \leqq \max|F + A_1\Psi_1 + \ldots + A_n\Psi_n| + H_1 \sqrt{\frac{1}{l}\int_0^l [kF - A_1\theta_1 - \ldots - A_n\theta_n]^2\,dx},$$

где

$$\theta_i = -\left\{ \frac{d^2\left(EI\frac{d^2 \Psi_i}{dx^2}\right)}{dx^2} + k\Psi_i \right\}.$$

Мажорация формулы (16) будет пропорциональна величине

$$\sqrt{\int_0^l [kF - A_1\theta_1 - \ldots - A_n\theta_n]^2\, dx}$$

и потому для снижения мажорации надлежит определить коэффициенты A_i исходя из условия обращения интеграла

$$\int_0^l [kF - A_1\theta_1 - \ldots - A_n\theta_n]^2\, dx$$

в минимум, что дает для определения искомых значений $A_i = A_i^{(n)}$ систему линейных алгебраических уравнений

$$(17) \qquad \int_0^l kF\theta_i\, dx = \sum_{j=1}^{n} A_j^{(n)} \int_0^l \theta_i\theta_j\, dx, \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

всегда разрешимых, ибо, как легко доказать, функции θ_i тоже образуют замкнутую систему и потому будут линейно независимы, следовательно и их определитель Грамма будет отличен от нуля.

Из сказанного непосредственно вытекает

$$\int_0^l [kF - A_1^{(n)}\theta_1 - \ldots - A_n^{(n)}\theta_n]^2\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что и доказывает также сходимость примененного процесса, который для краткости в дальнейшем будем называть методой (α).

Исходя теперь из непосредственно установленной формулы

$$(18) \qquad \max|EIy''| \leq M_1 \sqrt{\frac{1}{l}\int_0^l |q|^2\, dx},$$

где

$$(19) \qquad M_1 \leqq \sqrt{4 + l \max \left| \frac{\partial}{\partial x} \log EI \right|} \sqrt{\sum_1^{\infty} \frac{l^4 (EI_{\max})^2 \gamma_n}{(EI_{\min} \gamma_n + k l^4)^2}}$$

и повторяя те же рассуждения приходим к ограничению

$$(20) \quad \max |EIy''| \leqq \max |EIF'' + A_1^{(n)} EI \Psi_1'' + \ldots + A_n^{(n)} EI \Psi_n''| +$$

$$+ M_1 \sqrt{\frac{1}{l} \int_0^l [kF - A_1^{(n)} \theta_1 - \ldots - A_n^{(n)} \theta_n]^2 \, dx},$$

которое является аналогом формулы (16).

Для того, чтобы избежать необходимости при применении вышеуказанного метода разрешать системы линейных уравнений, что при большом числе уравнений может представить неудобство с практической точки зрения, можно предварительно ортогонализировать и нормировать систему функций θ_r — в целях получения новой системы функций

$$\bar{\theta}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(n)} \theta_i .$$

Тогда полагая

$$(21) \qquad \bar{\Psi}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(n)} \Psi_i ,$$

имеем

$$\bar{\theta}_n = -\left\{ \frac{d^2 \left(EI \frac{d^2 \bar{\Psi}_n}{dx^2} \right)}{dx^2} + k \bar{\Psi}_n \right\}$$

и потому перестраивая систему функций Ψ_n по формулам (21) получаем такую систему функций $\bar{\Psi}_n$ для которой соответствующие функци $\bar{\theta}_n$ будут ортогональны и нормальны, т. е.

$$\int_0^l \bar{\theta}_n \bar{\theta}_m \, dx = \begin{cases} 1, n = m \\ 0, n \neq m. \end{cases}$$

Следовательно если в (16) вместо Ψ_i будут взяты функции $\bar{\Psi}_i$ удовлетворяющие очевидно граничным условиям и образующим замкнутую систему,

то определение соответствующих коэффициентов A_i совершается индивидуально при помощи формул (метода (β))

$$A_i = k \int_0^l F \bar{\theta}_i \, dx.$$

Для снижения, т. е. улучшения мажорации может быть применен еще один метод, который представляет собою комбинацию метода последовательных приближений и метода вариационного алгоритма (метода (γ)).

Для этого, возвращаясь к формуле (13)

$$Y = F + A\Psi_1 + u \tag{13}$$

и замечая, что функция U удовлетворяет рассматриваемым граничным условиям, а также дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI \frac{d^2 u}{dx^2}\right) + ku = D = -(kF - A\theta_1),$$

представим, аналогично (13), функцию u в виде

$$u = F^{(1)} + A^{(2)} \Psi_2 + u_1, \tag{22}$$

где

$$\frac{d^2\left(EI \frac{d^2 F^{(1)}}{dx^2}\right)}{dx^2} = D$$

$$\frac{d^2\left(EI \frac{d^2 u_1}{dx^2}\right)}{dx^2} + ku_1 = D^{(1)} = -(kF^{(1)} - A^{(2)} \theta_2).$$

Применяя теперь для ограничения u_1 ранее данную формулу (11) из (13) и (22) имеем

$$\max|y| \leq \max|F + A^{(1)} \Psi_1 + F^{(1)} + A^{(2)} \Psi_2| +$$
$$+ H_1 \sqrt{\frac{1}{l} \int_0^l [kF^{(1)} - A^{(2)} \theta_2]^2 \, dx},$$

причем мажорация доставляемая правой частью вышенаписанного неравенства будет пропорциональна величине

$$\sqrt{\int_0^l [kF^{(1)} - A^{(2)} \theta_2]^2 \, dx}.$$

Определяя следовательно коэффициент H_1 согласно ранее сказанному (см. формулу (12)), а коэффициент $A^{(2)}$ исходя из условия обращения в минимум интеграла

$$\int_0^l [kF^{(1)} - A^{(2)} \theta_2]^2 \, dx,$$

получаем

$$A^{(2)} = \frac{\int_0^l kF^{(1)} \theta_2 \, dx}{\int_0^l \theta_2^2 \, dx}.$$

Продолжая указанный процесс далее приходим очевидно к ограничению

$$(22_1) \quad \max |y| \leq \max |F + A^{(1)} \Psi_1 + F^{(1)} + A^{(2)} \Psi_2 + \ldots + F^{(s)} + A^{(s+1)} \Psi_{s+1}| +$$
$$+ H_1 \sqrt{\frac{1}{l} \int_0^l [kF^{(s)} - A^{(s+1)} \theta_{s+1}]^2 \, dx},$$

где

$$A^{(r)} = \frac{\int_0^l kF^{(r-1)} \theta_r \, dx}{\int_0^l \theta_r^2 \, dx}$$

и

$$\frac{d^2 \left(EI \frac{d^2 F^{(r)}}{dx^2} \right)}{dx^2} = -(kF^{(r-1)} - A^{(r)} \theta_r);$$

$$\theta_r = -\left\{ \frac{d^2 \left(EI \frac{d^2 \Psi_r}{dx^2} \right)}{dx^2} + \kappa \Psi_r \right\},$$

причем для максимального значения момента имеем аналогичное ограничение

$$\max|EIy''| \leq \max|EIF'' + A^{(1)}EI\Psi_1'' + \cdots + EIF^{(s)''} + A^{(s+1)}EI\Psi''_{s+1}| + \\ + M_s\sqrt{\frac{1}{l}\int\limits_0^l [kF^{(s)} - A^{(s+1)}\theta_{s+1}]^2\,dx}.$$

В качестве численного примера возьмем дифференциальное уравнение

$$EIy^{(IV)} + ky = q(x) \tag{23}$$

при граничных условиях

$$y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0,$$

где

$$k = 15\,\frac{\text{кг}}{\text{см}^2},\quad I = 47.430\ \text{см}^4$$

$$l = 820\ \text{см},\quad E = 140.000\,\frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

и где $q(x)$ представляет сосредоточенную в точке $x \neq \frac{l}{2}$ нагрузку, т. е.

$$q(x) = 0$$

для

$$x \neq \frac{l}{2},$$

и

$$\int\limits_{\frac{l}{2}-0}^{\frac{l}{2}+0} q\,dx = P.$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$\max|y| = 0.000181\,P. \tag{24}$$

Применяя теперь ранее указанную формулу (15) получаем

$$\max|y| < 0.000216\,P,$$

что по сравнению с истинной величиной (24) искомого максимума дает мажорацию на 19% больше истинного.

Для снижения полученной мажорации применим методу (α) при $n=2$, вводя две функции

$$\Psi_1 = \sin\frac{\pi x}{l}, \quad \Psi_2 = \sin\frac{3\pi x}{l}. \tag{25}$$

Тогда вычисление по формуле (16) дает результат

$$\max|y| < 0.000185,$$

мажорированный по сравнению с истинным только на 2.7%.

Дальнейшее снижение мажораций может быть проведено помощью применения методы (γ) (при тех же функциях (25)), причем уже при $s=1$ получается совпадение вычисленного максимального значения прогиба (по мажорационной формуле (22_1)) с истинным значением (24) до шестого десятичного знака, т. е. в результате снижения мажораций путем указанного метода получается ошибка выражающаяся в десятых долях процента.

В качестве второго примера возьмем ту же дифференциальную систему (23), но уже при постоянной нагрузке. Тогда применение априорной формулы (12) мажорации дает результат

$$\max|y| < 0.1372\,q,$$

т. е. полученная мажорация почти в два раза превышает истинное значение искомого максимального прогиба, который в рассматриваемом случае равен

$$\max|y| = 0.07438\,q,$$

как это показывает точное интегрирование данной дифференциальной системы.

Применение методы (α) к рассматриваемому примеру дает ограничение

$$\max|y| < 0.7901\,q,$$

т. е. в результате снижения мажорации по этой методе получается значение максимального прогиба с точностью около 6%.

Снижение мажорации по методе (α) при $n = 2$ приводит к неравенству

$$\max |y| < 0.07469\, q,$$

т. е. дает искомую величину с точностью до 0.4%.

Наконец применение методы (γ) уже при $s = 1$ приводит к неравенству

$$\max |y| < 0.07439,$$

откуда вытекает, что применение методы (γ) дает мажорацию, которая отличается от истинного значения максимальной величины прогиба всего только на 0.01%.

Из вышеразобранных примеров следует, что методы установленные в этой статье являются весьма действительным средством для снижения мажораций искомых максимальных значений.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О ВЛИЯНИИ ВОДОРОДНЫХ ЛИНИЙ ПОГЛОЩЕНИЯ НА КОЛОРИМЕТРИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗВЕЗДНЫХ ТЕМПЕРАТУР

В. Г. ФЕСЕНКОВА

(*Представлено академиком* А. А. Белопольским)

Как известно, большинство определений звездных температур производились до настоящего времени главным образом путем глазомерных оценок цветности звезд, причем каллибровка шкалы получалась путем сравнения с опорными звездами с уже известными температурами. В дальнейшем подобные определения начали в большем или меньшем масштабе производиться при помощи колориметров. При колориметрическом способе шкала прибора может быть получена независимо от каких-либо опорных звезд, которые необходимы только для определения ее нуль-пункта. В известном каталоге Герцшпрунга (Hertzsprung) число температурных определений на основании физиологического восприятия цветности звезды составляет не менее 65%. Это обилие уже собранного колориметрического материала и в особенности большие преимущества колориметрического способа, как в смысле скорости наблюдений, так и точности получаемых результатов, заставляет поставить вопрос, насколько колориметрическая шкала звездных температур равнозначуща шкале, полученной на основании спектрофотометрического способа для той же области спектра. Различие между обеими шкалами, если рассматривать оба способа свободными от систематических погрешностей им присущих, зависит исключительно от того, что в первом — наблюдатель получает общее цветовое впечатление от всей визуальной области спектра со всеми наличными полосами или линиями поглощения, в то время как во втором — подобные области по возможности обходятся и получаемый результат от них более или менее свободен. Для возможности приведения всех колориметрических определений к спектро-

фотометрической шкале необходимо найти влияние линий поглощения в спектрах звезд на физиологическое восприятие цветности.

Как известно, на основании трихроматической теории зрения любое монохроматическое излучение можно представить в смысле характеристики его цветности точкой в равностороннем треугольнике Максвелла. Различные спектральные излучения образуют в этом треугольнике кривую. В работе «Определение звездных температур»* мною было показано, каким образом можно представить аналогичным образом цвет любого источника света, распределение энергии в спектре которого известно. Координаты этой представляющей точки получаются, как среднее весовое координат всех точек спектральной кривой, если им придать определенный вес, представляющий влияние данного излучения на образование впечатления цветности.

Следовательно, источник света с распределением энергии $E_{\lambda,T}$ представляется точкой с координатами

$$(1) \qquad \bar{x} = \frac{\int\limits_0^\infty w_\lambda x_\lambda E_{\lambda,T}\, d\lambda}{\int\limits_0^\infty w_\lambda E_{\lambda,T}\, d\lambda}; \quad \bar{y} = \frac{\int\limits_0^\infty w_\lambda y_\lambda E_{\lambda,T}\, d\lambda}{\int\limits_0^\infty w_\lambda E_{\lambda,T}\, d\lambda}$$

где x_λ, y_λ — координаты точек спектральной кривой, w_λ — физиологический вес данной точки.

Мною показано в упомянутой выше работе, каким образом вычисляются эти веса w_λ, и приведена их таблица для всех монохроматических излучений через каждые 100 $\mathring{A}$. Если $E_{\lambda,T}$ представляет визуальную яркость определенных участков спектра абсолютно-черного тела с температурой T, то веса w_λ изменяются от 5.1 для крайних красных лучей, затем несколько уменьшаются и доходят до 3.8 для $\lambda = 0.60\ \mu$, далее же непрерывно увеличиваются. Весьма быстрое увеличение наступает, начиная с $\lambda = 0.50\ \mu$, для которого w_λ равен 6.0, так что для $\lambda = 0.45\ \mu$ имеем $w_\lambda = 100$, а для $\lambda = 0.40\ \mu$ — соответственно 1920.

Таким образом крайние фиолетовые части спектра несмотря на свою слабость оказывают все же значительное влияние на цветность наблюдаемого

* Астрономический журнал, т. VI, вып. 2.

источника света; достаточно самой небольшой примеси этих лучей для того, чтобы совершенно изменить наше цветовое впечатление.

Изучение влияния отдельных спектральных линий на восприятие цветности представляет довольно трудную задачу, так как каждую линию необходимо трактовать особо в соответствии с ее положением в спектре, шириной ее и степенью контрастности. При большом количестве линий задача делается весьма трудно разрешимой. При ограниченном же числе линий, она может быть разрешена без труда. Ставим проблему следующим образом. Пусть имеем идеальный колориметр, в котором цвет поверхности сравнения в точности представляет цвет абсолютно-черного тела той или иной температуры. Пусть эта поверхность сравнения сравнивается с изображением звезды, представляющей тоже абсолютно-черное тело, но с отдельными линиями поглощения. Изменяя цвет поверхности сравнения колориметра, приводим его к наибольшему совпадению с цветом звезды. Требуется определить насколько цветная температура звезды, определенная спектрофотометрически по участкам спектра свободным от линий поглощения, отличается от температуры, отсчитанной по шкале колориметра.

Мы рассматриваем влияние водородных линий серии Бальмера на протяжении визуальной области спектра, единственной, которая нас в данном случае может интересовать. Эта серия определяет характер спектра звезд типа A и значительно преобладает перед другими линиями в спектрах F, B и даже O. Таким образом полученные результаты должны характеризовать систематические различия между колориметрической и спектрофотометрической шкалами для всех звезд ранних спектральных классов.

Пусть имеем линии

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \ldots,$$

ширина которых в ангстремах есть

$$\delta\lambda_1 \quad \delta\lambda_2 \quad \delta\lambda_3 \ldots$$

и контрастность по отношению к непрерывному спектру в той части, где линия находится

$$k_1 \quad k_2 \quad k_3 \ldots$$

Под контрастностью k подразумеваем величину

$$k = \frac{\text{яркость линии}}{\text{яркость спектра}} - 1.$$

Следовательно, если линия поглощения, то $k < 0$, если же — испускания, то $k > 0$. В таком случае координаты, представляющие цветность звезды в треугольнике Максвелла, будут, как легко видеть, следующие:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}\int\limits_0^\infty w_\lambda E_{\lambda,T}\, d\lambda + x_{\lambda_1} k_1 w_{\lambda_1} E_{\lambda_1,T}\,\delta\lambda_1 + x_{\lambda_2} w_{\lambda_2} E_{\lambda_2,T}\, k_2\,\delta\lambda_2 + \cdots}{\int\limits_0^\infty w_\lambda E_{\lambda,T}\, d\lambda + k_1 w_{\lambda_1} E_{\lambda_1,T}\,\delta\lambda_1 + w_{\lambda_2} E_{\lambda_2,T}\, k_2\,\delta\lambda_2 + \cdots}$$

и аналогичное выражение для $\bar{\bar{y}}$.

Так как влияние линий на цветность, вообще говоря, невелико, то можно представить предыдущее выражение в виде более удобном для вычислений следующим образом:

$$\frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}} = \frac{\bar{\bar{x}} - \bar{x}}{\bar{x}} = \frac{k_1 w_{\lambda_1} E_{\lambda_1,T}\,\delta\lambda_1}{\int\limits_0^\infty w_\lambda E_{\lambda,T}\, d\lambda}\left(\frac{x_{\lambda_1}}{\bar{x}} - 1\right) + \frac{k_2 w_{\lambda_2} E_{\lambda_2,T}\,\delta\lambda_2}{\int\limits_0^\infty w_\lambda E_{\lambda,T}\, d\lambda}\left(\frac{x_{\lambda_2}}{\bar{x}} - 1\right) + \cdots \tag{2}$$

В треугольнике Максвелла можно вычислить кривую абсолютно черного тела, представляющую геометрическое место точек для непрерывно изменяющейся температуры в известных пределах. Эта кривая была вычислена мною по выражениям (1), где $E_{\lambda,T}$ есть визуальная яркость спектра для разных λ и T, взятая из таблиц Шаронова.* Следуя по этой кривой в сторону увеличения x-ов, чему соответствует уменьшение y, мы переходим все к более и более высоким температурам. В выражении (2), где коэфициенты k_i все отрицательны в случае линий поглощения, общий знак выражения зависит от разностей

$$\frac{x_{\lambda_i}}{\bar{x}} - 1.$$

* Известия Астрономического института, 1928, стр. 226.

Для наивысшей температуры в 20 тысяч градусов координата кривой абсолютно черного тела есть 0.750. Соответствующие значения x_λ больше $\bar{x}$ для всех длин волн меньше 0.49 μ. Отсюда заключаем, что все линии Бальмера видимой части спектра за исключением H_α приводят к отрицательным величинам $\frac{\delta \bar{x}}{\bar{x}}$ т. е. влияют на колориметрическую оценку температуры в сторону ее понижения. Линии поглощения с длиной волны большей 0.50 μ, напротив того, увеличивают наблюдаемую температуру звезды. Очевидно, что при многочисленных линиях более или менее равномерно распределенных по всему спектру должна иметь место более или менее полная компенсация их влияний. Для водородных же линий эффект будет очевидно односторонним. Действительно при малом весе w_λ для красных лучей влияние линии H_α будет сравнительно ничтожным по сравнению с другими линиями, расположенными к фиолетовому концу спектра от длины волны 0.49 μ.

Материалом для данного исследования мне служили снимки призменных спектров, сделанные Г. А. Шайном на Симеизской обсерватории. Кроме спектра звезды, полученного с полным отверстием объектива, наблюдатель фотографировал с той же экспозицией добавочные спектры тех же звезд, закрывая объектив различными диафрагмами в шахматном порядке, так что свободные отверстия находились в отношениях

$$1.00 : 0.47 : 0.31 : 0.18.$$

Следовательно при достаточно ярком спектре можно было получить для каждой длины волны четыре точки характеристической кривой, связывающей логарифмы яркостей, выраженные в некоторой произвольной шкале, с соответствующими почернениями. Мною были выбраны только сравнительно яркие звезды, дающие по крайней мере один добавочный спектр, так как для звезд более слабых линии поглощения слишком мало отличались от общего фона пластинки и их интенсивность не могла быть, поэтому, измерена. Измерения велись на микрофотометре Гартмана, причем промерялось почернение в каждом спектре звезды, намеченной для исследования, в двух местах симметрично расположенных относительно соответствующей линии, а также почернение самой линии в первом наиболее выдержанном спектре. Нужно заметить, что линия H_β находилась на краю спектра и потому не всегда могла быть измерена. В ряде случаев,

вследствие дефектов в ходе часового механизма, спектры представлялись несколько полосатыми по своей длине, что несколько затрудняло измерения и во всяком случае могло вносить систематические погрешности. Отчасти по этой причине измерение этих спектров на саморегистрирующем микрофотометре было признано мало соответствующим цели. Каждое измерение почернения спектра, приводимое ниже, основано на восьми наведениях клина микрофотометра.

Пластинка 7 IX 1927

	H_β	H_γ	H_δ	H_ε
ε Cephei	41.9	45.7	41.4	34.8
	46.2	51.1	48.6	43.3
	38.7	42.5	39.0	35.0
	33.7	36.5	35.6	32.8
30 Cephei	34.7	37.0	34.7	34.1
	37.65	44.3	41.65	40.8
		36.0	34.8	32.8
		31.7	31.6	29.6
ξ Cephei	44.7	47.0	43.4	39.0
	46.4	51.6	47.4	42.0
		42.2	38.8	35.3
		36.0	34.9	31.4
		31.8	30.5	
g Cephei	40.95	45.1	39.4	36.9
	41.5	47.3	41.4	38.8
λ Cephei		42.1	38.1	35.5
		43.6	41.6	38.1
		35.2	34.4	31.4
		32.3	31.3	30.2
19 Cephei	36.5	43.0	41.0	38.3
	40.2	45.9	43.2	40.0
	32.6	36.95	35.0	32.7
		33.2	31.2	30.1

Пластинка 29 VIII 1927

	H_β	H_γ	H_δ	H_ε
30 Cephei	37.2	39.6	37.6	34.1
	41.8	49.2	46.0	42.5
		38.7	38.0	35.5
		35.2	34.4	
19 Cephei		48.4	45.2	42.9
		52.0	49.4	45.0
		40.7	38.8	36.7
		36.7		

Пластинка 25—26 IX 1927

	H_β	H_γ	H_δ	H_ε
ε Cephei	32.8	37.8	35.1	31.4
	37.0	43.4	41.0	38.0
	31.3	35.8	34.2	31.5
		32.1	31.1	29.4
ξ Cephei	37.4	40.1	37.4	33.1
	40.4	44.9	41.2	36.8
	34.0	37.6	33.5	
	31.0	33.2	30.6	
30 Cephei		34.4	32.1	32.1
		39.6	37.9	35.2
		33.8	32.2	
δ Cephei	39.6	46.4	41.7	34.4
	44.9	44.8	46.1	41.9
	36.0	41.7	38.2	34.8
		37.5		

Пластинка 26 VIII 1927

	H_β	H_γ	H_δ	H_ε
12 Lacertae	33.7	41.6	37.6	37.8
	37.1	45.2	44.0	41.2
		36.4		
		32.8		
10 Lacertae		47.7	42.7	41.6
		50.4	48.6	44.6
		38.2	38.8	37.2
		35.4	34.8	33.4
6 Lacertae	41.4	47.5	44.0	43.4
	46.2	52.4	52.3	47.0
		42.4	40.4	38.3
		38.3	36.5	33.1

В первой строке даются для каждой звезды средние отсчеты микрофотометра для водородных линий, в следующих строках соответствующие отсчеты для спектров с различными отверстиями объектива.

При помощи этих данных построены редукционные кривые для каждой линии и для каждой пластинки в отдельности, связывающие отсчеты микрофотометра с логарифмами соответствующих частей спектра. Вообще говоря, подобные кривые должны иметь несколько различный вид для разных участков спектра, так как известно, что гамма-коэффициенты характеристических кривых зависят от длины волны. Однако построение редукционных кривых для отдельных линий уменьшает количество материала,

пригодного для этой цели и, следовательно, увеличивает случайные погрешности построения. Поэтому, поскольку для недалеко расположенных линий не обнаруживается систематического различия между редукционными кривыми, целесообразнее соединить их в одну кривую, получающуюся вследствие этого значительно увереннее. На основании сказанного редукционные кривые строились у меня общие для линий $H_\beta - H_\gamma$ и $H_\delta - H_\varepsilon$. Каждая звезда доставляла несколько точек подобной кривой. Путем сдвига их вдоль оси абсцисс при условии сохранения разности абсцисс этих точек постоянной, можно было добиться наилучшего расположения всех точек вдоль той же самой кривой, по которой затем отсчитывались логарифмы яркостей линий поглощения и соответствующих мест непрерывного спектра. Дальнейший шаг вперед заключался в измерении ширины линий на измерительном приборе Бамберга и измерении расстояния между отдельными линиями с целью вывода дисперсии спектров в различных частях пластинки в функции расстояния от центра. Расстояния между отдельными линиями были нанесены на графику, причем оказалось, что все они могут быть представлены формулой

$$\Delta = \Delta_0 (1 + \beta s),$$

где s расстояние от центра пластинки, а β — коэффициент, который можно с небольшой натяжкой принять для всех промежутков между линиями одинаковым и равным 0.001, если s выражено в миллиметрах. Для вычисления дисперсии редуцируем сначала все спектры к центру пластинки и полученные отсчеты положения линий представляем обычной формулой

$$n - n_0 = \frac{C_0}{\lambda - \lambda_0},$$

содержащей три неизвестных параметра n_0, C_0, λ_0, при помощи которых необходимо представить положения четырех линий серии Бальмера.

Принимая

$$n = 3.68 \text{ мм} \qquad 1.88 \qquad 0.73 \qquad 0.00$$

для линий

$$H_\beta \quad H_\gamma \quad H_\delta \quad H_\varepsilon$$

с длинами волн

$$4861\,\mathring{A} \qquad 4340 \qquad 4102 \qquad 3970$$

находим по трем линиям H_β, H_γ, H_ε

$$C_0 = -21660, \quad n_0 = 11.48 \quad \text{и} \quad \lambda_0 = 2083.$$

Положение четвертой линии, согласно указанной выше формуле, получается равным 0.75 мм.

Нетрудно видеть, что постоянство коэффициента β обусловливает постоянство параметра λ_0. Следовательно спектр звезды, находящейся на расстоянии s от центра представляется аналогичным выражением

$$n = n_0 + \frac{C_0(1+\beta s)}{\lambda - \lambda_0},$$

при чем n_0 вообще не играет роли для определения соответствующей дисперсии. Находим:

$$\frac{d\lambda}{dn} = -\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{C_0(1+\beta s)},$$

что дает число ангстремов на каждый миллиметр спектра. Например, для разных линий имеем:

	H_β	H_γ	H_δ	H_ε
$s = 0$	356.3	235.2	188.2	164.4
20	349.4	230.6	184.5	161.2
40	342.5	226.1	180.9	158.1
60	336.1	221.9	177.5	155.1
80	329.9	217.8	174.3	152.2

Измерение ширины линий также производилось на измерительном приборе Бамберга с точностью отсчетов до полумикрона. Однако трудность наведения нити на часто неправильный и обычно плохо определенный край линии не позволила получить вполне удовлетворительных результатов. Поэтому я предпочел оценивать ширину линии на глаз по сравнению с промежутком между двумя близкими нитями в поле зрения микроскопа. Этот промежуток был тщательно измерен и оказался равным 0.082 мм. Таким образом контур линии не определялся, что впрочем и невозможно выполнить при помощи микрофотометра Гартмана. Вместо этого находилась такая ширина линии, произведение которой на дефект яркости по сравнению с фоном спектра дало бы примерно ту же площадь, как и весь контур линии. Оценка ширины линий носила поэтому несколько субъективный характер, и эта часть работы является без сомнения ее наиболее слабым местом. Нижеследующая таблица

дает для каждой звезды произведение величины k на ширину соответствующей линии выраженной в мм.

Дата	Назв. звезды	Спектр	$k\,\delta n$ H_β	H_γ	$H\delta$	H_ε
7 IX	λ Cephei	Od	—	0.0075	0.0182	0.0093
7 IX	19 Cephei	Oe_5	0.0164	0.0104	0.0112	0.0059
29 VIII	19 Cephei	Oe_5	—	0.0054	0.0061	0.0047
26 VIII	10 Lacertae	Oe_5	—	0.0108	0.0187	0.0121
7 IX	9 Cephei	B_2	0.0032?	0.0118	0.0081	0.0124
26 VIII	12 Lacertae	B_2	0.0209	0.0116	0.0178	0.0116
26 VIII	6 Lacertae	B_3	0.0220	0.0113	0.0228	0.0138
7 IX	30 Cephei	A_2	0.0233	0.0350	0.0502	0.0521
29 VIII	30 Cephei	A_2	0.0258	0.0393	0.0440	0.0610
25—26 IX	30 Cephei	A_2	—	0.0362	0.0442	0.0332
7 IX	ε Cephei	A_5	0.0160	0.0246	0.0178	0.0278
25—26 IX	ε Cephei	A_5	0.0174	0.0251	0.0155	0.0270
7 IX	ξ Cephei	A_8	0.0124	0.0263	0.0089	0.0121
25—26 IX	ξ Cephei	A_8	0.0240	0.0330	0.0193	0.0340

Умножая эти значения на соответствующие дисперсии с учетом расстояния звезды от центра пластинки и образуя средние для каждого спектрального типа, получаем:

	H_β	$k\,\delta\lambda$ H_γ	$H\delta$	H_ε
Od	—	1.63	3.37	1.46
Oe_5	5.56	2.07	2.20	1.28
B_2	7.22	2.73	2.37	1.91
B_3	7.48	2.47	4.12	2.20
A_2	8.40	8.22	8.16	7.60
A_5	5.88	5.71	3.11	4.31
A_8	6.07	6.70	2.49	3.58

Для дальнейших вычислений согласно формуле (2) я воспользовался вычисленными мною ранее («Определение звездных температур») координатами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ для температур T от 2 до 20 тысяч градусов. Приводим эти координаты, начиная от $T = 6000$. Имеем:

T	6.0	8.0	10.0	12.0	15.0	20.0
$\bar{x}$	0.616	0.666	0.698	0.717	0.734	0.750
$\bar{y}$	0.317	0.293	0.279	0.269	0.260	0.252

Далее для всех водородных линий визуальной области спектра находим аналогичные координаты x_λ и y_λ с соответствующими весами w_λ.

	H_α	H_β	H_γ	H_δ	H_ε
λ	6563	4861	4340	4102	3970
x_λ	0.088	0.903	1.138	1.098	1.090
y_λ	0.153	0.280	0.002	0.000	0.000
w_λ	4.4	10.7	215	1090	2300

Для каждой температуры указанной выше берем в произвольных единицах значение видимой яркости в различных точках спектра через каждые 100 Å. Путем интерполяции находим величины $E_\lambda\ w_\lambda$ для каждой из спектральных линий. Имеем:

T_λ	H_α	H_β	H_γ	H_δ	H_ε	$\int_{0.4}^{0.7} w_\lambda E_{\lambda,T} d\lambda$
6.0	170	1220	2060	785	360	4068.10³
8.0	43,5	418	835	335	157	1351.10³
10.0	80	910	1950	800	440	2856.10³
12.0	12.1	155	344	154	82	481,3.10³
15.0	18.9	271	624	288	146	832.10³
20.0	31.2	488	1195	552	291	1511.10³

Необходимо заметить, что каждая строка этой таблицы выражена в особых единицах. На основании данной выше графики, устанавливая соотношение между спектральными классами и температурой, принимаем следующие значения для $k\,\delta\lambda$.

	T_λ	H_α	H_β	H_γ	H_δ	H_ε
A_8	7900—8000°	6.0?	6.0	5.5	2.5	3.5
A_2	10000	8.0?	8.4	8.2	8.2	7.6
B_9	12000	8.0?	8.5	6.6	7.5	6.3
B_4	15000	7.5?	7.7	3.5	4.6	2.8
Oe_5	20—25000	5.0?	5.5	2.0	2.3	1.4

По этим данным находим на основани формулы (2)

	$T = 8.0$	10.0	12.0	15.0	20.0
$\frac{\delta x}{x}$	— 0.00355	— 0.00610	— 0.00513	— 0.00289	— 0.00160
$\frac{\delta y}{y}$	0.00458	0.00912	0.00814	0.00481	0.00253

Таково относительное уклонение точки, представляющей в треугольнике Максвелла цвет звезд, от кривой абсолютно-черного тела. Теперь необходимо найти, какому изменению в определяемой температуре это соответствует.

Предположим, что поверхность сравнения в колориметре непрерывно изменяет свой цвет и что, следовательно, точка, представляющая этот цвет в треугольнике Максвелла, непрерывно перемещается по кривой абсолютно черного тела. Каждому положению точки на кривой соответствует определенная температура. Наблюдения заключаются в сравнении цвета звезды с цветом поверхности сравнения. Изменяя цвет последней, наблюдатель добивается того, чтобы различие в цветах обоих объектов сравнения достигло бы минимума. Это имеет место тогда, когда точка, представляющая цвет поверхности сравнения, будет остановлена на наименьшем расстоянии от точки, представляющей цвет звезды, следовательно придет в основание перпендикуляра, опущенного из звезды на кривую абсолютно-черного тела. Температура, соответствующая этому положению, и будет колориметрическая температура, искаженная влиянием линий Бальмера. Поскольку кривая абсолютно-черного тела уже дана, можно определить температуры, соответствующие разным ее точкам в функции координат x или y; предпочтительнее взять, конечно, x, как меняющуюся в более широких пределах.

Полагая

$$\frac{1}{T}=f(x),$$

находим путем интерполяции значения производных этой функции для разных $\frac{1}{T}$ именно:

$\frac{1}{T}$	0.20	0.15	0.10	0.075	0.05
$f'(x)$	—0.825	—0.800	—0.840	—0.942	—1.015.

Пусть теперь

$$y=\varphi(x)$$

есть кривая абсолютно-черного тела в треугольнике Максвелла. Находим для разных x-ов

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\alpha,$$

а также

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\operatorname{tg}\beta\,.$$

Зная α и β для каждого x, определяем величину проэкции на ось x-ов расстояния между основанием перпендикуляра, упомянутого выше и точкой кривой абсолютно-черного тела, соответствующей исходной температуре, т. е. 8, 10, 12 и т. д. тысяч градусов, для которой велись выше указанные вычисления. Эта проэкция дается, как нетрудно видеть, формулой

$$\delta\bar{x} = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}\cos(\alpha - \beta)\cos\alpha,$$

а соответствующее изменение температуры находится из выражения

$$\delta\frac{1}{T} = f'(x)\,\delta\bar{x}.$$

Вычисления, произведенные соответственно этим соображениям, приводят к следующим результатам:

T	8.0	10.0	12.0	15.0	20.0
$\frac{dy}{dx}$	−0.475	−0.485	−0.510	−0.515	−0.535
$\frac{\delta y}{\delta x}$	−0.614	−0.596	−0.595	−0.5885	−0.533
$\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}$	0.00277	0.00496	0.00428	0.00246	0.00136
$\delta\bar{x}$	−0.00249	−0.00444	−0.00380	−0.002185	−0.00120
$f'(x)$	−0.810	−0.840	−0.895	−0.975	−1.015
$\delta\frac{1}{T}$	0.00202	0.00373	0.00340	0.00213	0.00122
δT	−129° C	−373°	−489°	−480°	−488°

Как отсюда видно, поправка оказывается для звезд типа A довольно значительной. При каллибрировании шкалы колориметра с синим клином перед лампочкой по звездам с уже известными температурами необходимо принимать во внимание полученные здесь поправки. Само собою разумеется, что эти поправки не применимы к тому случаю, когда при помощи того или иного приспособления цвет самой звезды приводится к цвету поверхности сравнения, остающейся без изменения.

Кучино, Астрофизическая обсерватория.
Декабрь 1930 г.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931.
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОЛНЕЧНОЙ ПОСТОЯННОЙ

В. Г. ФЕСЕНКОВА

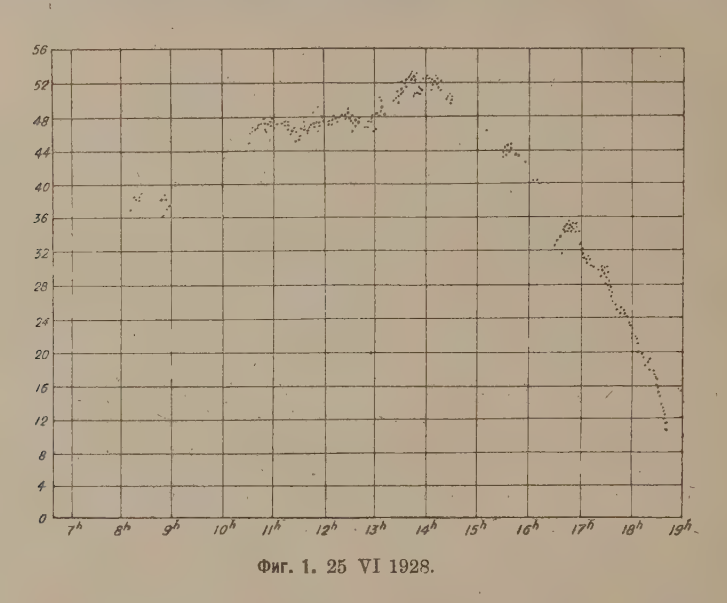
(*Представлено академиком* А. А. Белопольским)

1. Наблюдения над солнечной радиацией производились Е. В. Пясковской летом 1928 г. в 20 км от Одессы на берегу Сухого Лимана. Параллельно с обычными наблюдениями производилось определение солнечной радиации чрез водяной фильтр, состоящий из ванночки с плоско-параллельными стенками, наполненной дистиллированной водой. Подобный фильтр, исследование которого приводится ниже, отрезывает всю инфракрасную часть солнечного спектра, начиная с полосы поглощения Ψ'. Согласно результатам, полученным Вильзингом, можно было бы ожидать, что устранение полос селективного поглощения значительно улучшит ход солнечной радиации при изменении зенитного расстояния солнца и в частности исправит, а может быть и уничтожит совсем, известную полуденную депрессию. Кроме того, нами предполагалось, что устранение полос селективного поглощения, которые изменяются изо дня в день в зависимости от количества водяных паров и других составляющих на всем протяжении траэктории светового луча, придаст актинометрическим наблюдениям бо́льшую определенность, так как без спектральных средств, которых в нашем распоряжении не было, учесть эти полосы не представлялось возможным.

Наблюдения производились в совершенно ясную погоду, когда не было ни малейшего подозрения, что в направлении на солнце могут быть хотя бы легкие облака. Они велись через короткие промежутки времени, в некоторые дни даже через каждую минуту для того, чтобы можно было судить о степени неизменяемости атмосферы в течение короткого времени. При больших зенитных расстояниях, когда особенно легко ожидать наличия дымки или легких облаков, условия наблюдения контролировались при помощи зрительной трубы, дававшей на экране изображение солнца. Однако

нужно заметить, что некоторые дни, в которые наблюдения производились, отличались мутностью заметной прямо на глаз, хотя никаких следов облаков видеть было нельзя.

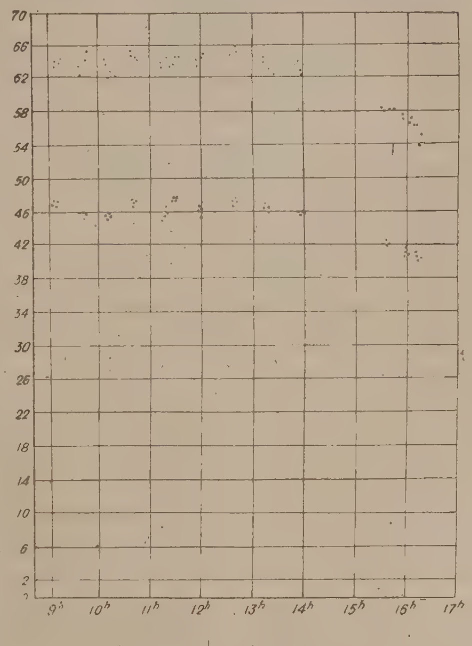
Весьма часто кривая солнечной радиации имела неправильный характер. Очень резкий пример этого рода представляет день 25 VI (фиг. 1), когда на протяжении двух часов около полудня радиация держалась постоянной, а затем значительно увеличилась. В этот день водяной фильтр не применялся. Другой день с резко выраженной аномалией — 16 VII (фиг. 2). Между



Фиг. 1. 25 VI 1928.

9 и 3 часами дня не было практически никакого изменения в наблюдаемой радиации и потому коэффициент прозрачности для этого случая должен был бы получиться равным единице, хотя в действительности он был довольно мал. В другие дни наблюдалась довольно резко выраженная асимметричность в кривой радиации до и после полудня, когда максимум оказывался передвинутым на утренние часы без какой бы то ни было полуденной депрессии. Ряд дней показывал полуденную депрессию, причем начало ее падает на различные часы (фиг. 3 и 4). Интересно отметить, что все эти особенности совершенно в одинаковой степени воспроизводятся как кривой полной радиации, наблюдаемой обычным путем при помощи актинометра Михельсона, так и кривой, получаемой через посредство водяного фильтра. Таким обра-

зом выводы Вильзинга этими наблюдениями не подтверждаются. Сравнительно небольшое число дней дает совершенно правильный ход радиации без малейшей полуденной депрессии и симметричный относительно полудня (см. фиг. 5, 6, 7, 8). Подобные дни являются в рассматриваемый период скорее исключением, чем правилом. Наиболее характерный ход радиации в различные дни согласно этим наблюдениям представлен на прилагаемых графиках.



Фиг. 2. 16 VII 1928.

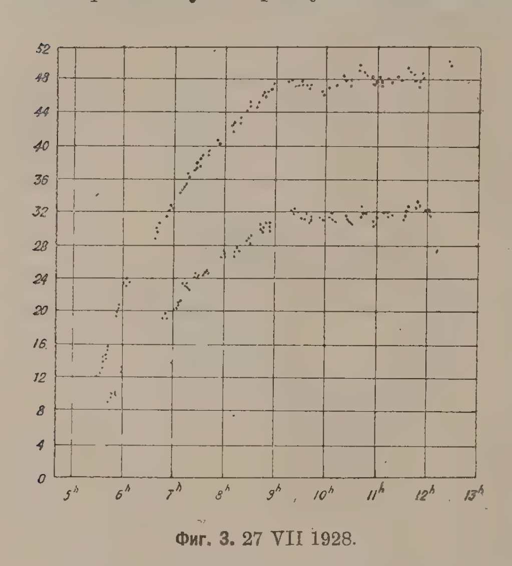
Поскольку применение водяного фильтра не уменьшает неправильности кривой изменения радиации в зависимости от зенитного расстояния, очевидно они зависят не от полос селективного поглощения, а от изменения степени мутности атмосферы.

2. Если нанести на графику логарифм радиации солнца $\log J$, как она наблюдается при различных зенитных расстояниях, в функции толщи атмосферы m, изменяющейся приблизительно как секанс зенитного расстояния, то в случае постоянства показателя прозрачности атмосферы мы должны получить прямую линию, причем тангенс угла наклона этой прямой к оси абсцисс равен логарифму этого показателя. При угле равном нулю показатель прозрачности равен единице и атмосфера будет, следовательно, совершенно прозрачна.

В действительности получается, обычно, кривая, мало впрочем отличающаяся от прямой, причем выпуклость этой кривой направлена к оси абсцисс. Это наблюдается в случае совершенно правильного хода радиации. При неправильном ходе вообще нельзя сказать ничего определенного. С водяным фильтром кривизна оказывается значительно меньше.

Так как вопрос определения солнечной постоянной есть вопрос экстраполяции наблюдаемой кривой радиации на отсутствие атмосферы, необхо-

димо тщательно исследовать из большого количества наблюдений, каким образом можно представить ход радиации на всем его протяжении, исходя из определенных представлений о сущности явления. Наиболее простое предположение заключается в том, что при условии постоянства атмосферы в течение дня, показатель прозрачности для каждой отдельной длины волны держится постоянным независимо от высоты солнца над горизонтом, но увеличивается с длиной волны. Вследствие этого солнце у горизонта получает красноватую окраску и специфическая прозрачность атмосферы, т. е. рассчитанная на единицу атмосферной толщи, оказывается у горизонта значительно больше, чем при меньших зенитных расстояниях. Наличие полос поглощения несколько усложняет картину, но характер ее остается тем же. Для проверки этого мною было произведено исследование показателей прозрачности в общих лучах, полученных Н. Н. Калитиным на основании записей актинографа Крова-Савинова в Слуцкой обсерватории, за период 1913—1920 гг. Можно думать, что результаты, выведенные по 135 вполне ясным дням, характеризуют некоторое среднее состояние атмосферы и применимы для разрешения вопроса о способе наилучшего представления кривой солнечной радиации в зависимости от зенитного расстояния. Определяя коэффициент прозрачности $p_{m,\ m+1}$ как отношение количеств проходимой радиации $\frac{Q_{m+1}}{Q_m}$ соответственно толще воздуха в m и $m+1$ атмосфер, Н. Н. Калитин получил следующие значения:

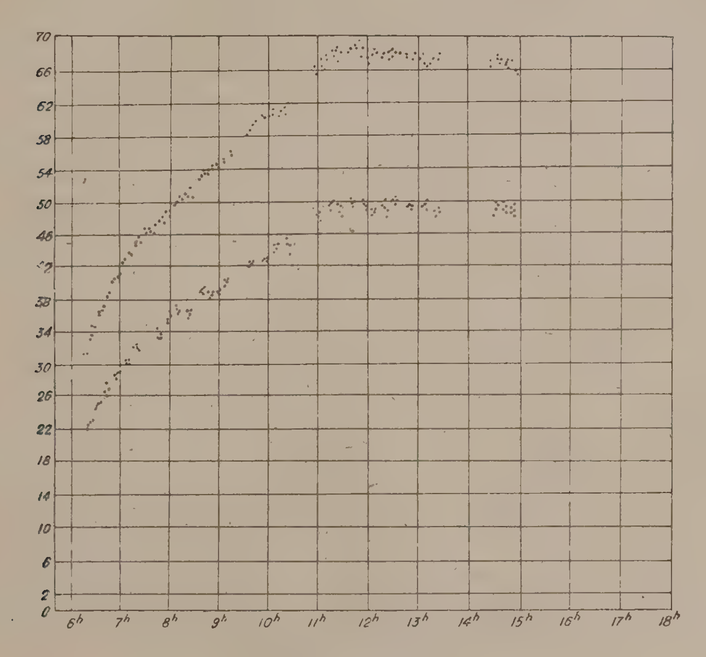


Фиг. 3. 27 VII 1928.

m..........	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
$p_{m,\ m+1}$	0.843	0.866	0.878	0.886	0.892	0.897	0.901	0.907

Отдельные серии подобных величин дают значительные скачки, но приведенные средние значения идут довольно плавно.

Мы видим, что как и следовало ожидать, получается увеличение специфической прозрачности атмосферы с увеличением зенитного расстояния. Для получения этого теоретическим путем нужно ввести в рассмотрение зависимость между показателем прозрачности и длиной световой волны, которая неоднократно исследовалась разными лицами, или, что удобнее,



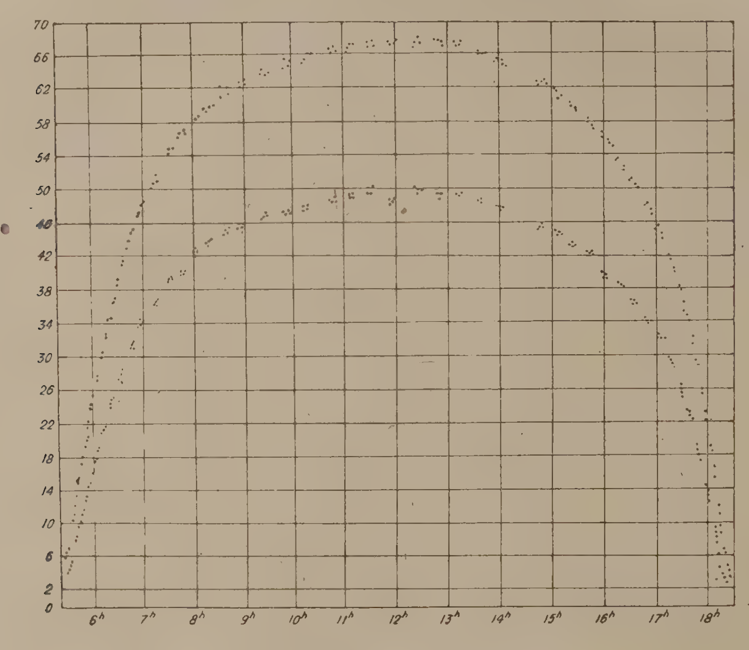
Фиг. 4. 29 VII 1928.

принять соответствующую эмпирическую зависимость, удовлетворительно представляющую наблюдения. Собственно говоря, можно было бы принять для p_λ определенное теоретическое выражение, отражающее самый механизм явления. Это, однако, представляет значительные трудности даже для непрерывной части спектра, лишенной теллурических полос. Попытка Кинга в этом направлении не увенчалась успехом. Кроме того все равно полученное выражение было бы слишком сложным, и следовательно, непригодным для точного интегрирования. Гораздо проще, поэтому, воспользоваться эмпирическим выражением, представляющим удовлетворительным образом

ход изменения p_λ в функции λ. Подобная формула дана Вильзингом* и имеет вид:

$$\log p_\lambda = \frac{a}{\lambda - b}$$

где a зависит от барометрического давления. Можно принять, что для данного дня a и b являются постоянными факторами.



Фиг. 5. 25 VIII 1928.

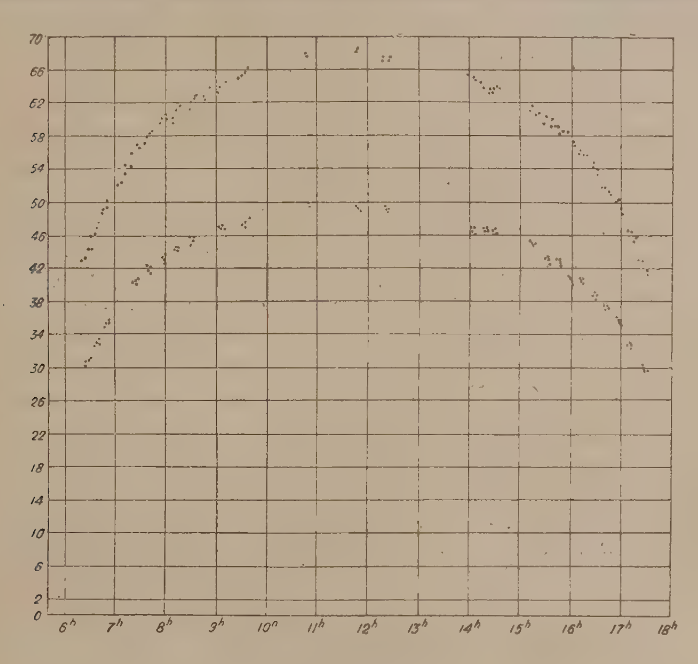
Если не принимать во внимание селективного поглощения, то имеем

$$p_{m,\,m+1} = \frac{\int\limits_0^\infty \lambda^{-5}\left(e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1\right)^{-1} e^{\frac{a(m+1)}{\lambda - b}}\, d\lambda}{\int\limits_0^\infty \lambda^{-5}\left(e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1\right)^{-1} e^{\frac{am}{\lambda - b}}\, d\lambda}.$$

Из ряда подобных уравнений определяем неизвестные величины a и b, при которых значения $p_{m,\,m+1}$ наилучшим образом представляли бы наблюде-

* Wilsing. Publ. der Astroph. Obs. zu Potsdam, № 72.

ния. Однако при вычислении этого интеграла необходимо учесть влияние полос поглощения в инфракрасной части спектра. Поскольку в работе Н. Н. Калитина не содержится никаких указаний относительно содержания паров воды, мне пришлось взять среднее содержание для широты 60°, получить для него эквивалентный слой воды и затем на основании экспериментальных работ



Фиг. 6. 25 VIII 1928.

Фоуля (Fowle)* получить показатели прозрачности для участков спектра содержащих полосы поглощения, зависящие от наличия водяного пара.

Взяв для объемного содержания различных газов

$$N_2\ 77.60\%;\ O_2\ 20.87\%;\ A\ 0.94\%;\ C_2O\ 0.2\%\ \text{и}\ H_2O\ 0.57\%$$

получаем для нормального давления в 760 мм, что эквивалентный слой воды составляет 3.67 см. Таблица Фоуля дает следующие значения p_λ для определенных участков спектра:

* Fowle. Smith. Miss. Coll., vol. 68, № 8; Astroph. Journ., vol. 42, p. 394; Smith. Phys. Tables, № 377.

Пределы	$p_{\lambda_1 \lambda_2}$
0.75 — 1.00 μ	0.87
1.00 — 1.25	0.80
1.25 — 1.50	0.38
1.5 — 2.0	0.63

В области от 2μ до 3μ примешивается поглощение от углекислоты. Эти средние показатели прозрачности представляются выражением

$$p_{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{\lambda, T} p_\lambda \, d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_{\lambda, T} \, d\lambda}$$

или, если в данных границах $\lambda_2' - \lambda_1'$ встречается полоса поглощения, то

$$p_{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda'_1} E_{\lambda, T} p_\lambda \, d\lambda + \int_{\lambda_2'}^{\lambda_2} E_{\lambda, T} p_\lambda \, d\lambda + E_{\lambda_1' \lambda_2'} p'_x (\lambda_2' - \lambda_1')}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_\lambda \, d\lambda}.$$

Беря границы полос селективного поглощения по болометрической кривой Вильзинга до 2μ, а далее по Слитору,* т. е. для отдельных полос

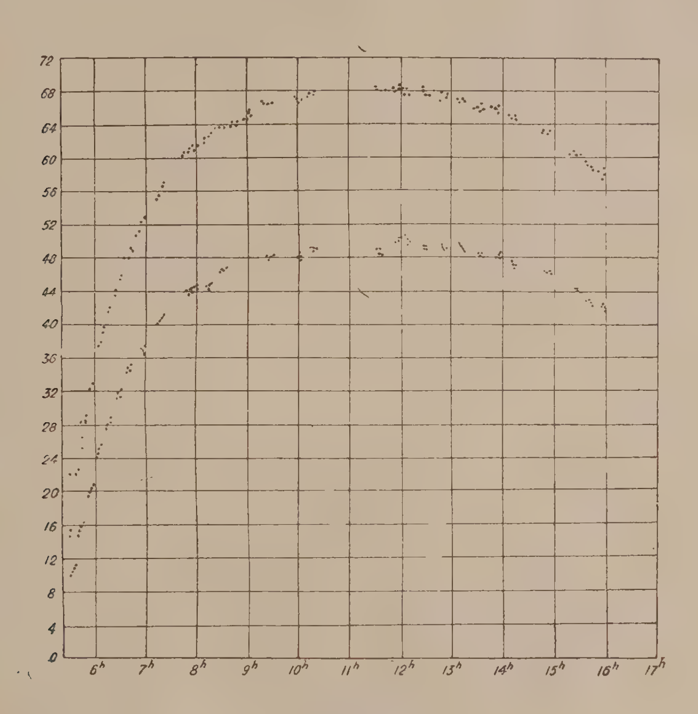
	$\lambda'_1 - \lambda'_2$
I	0.9 — 1.0 μ
II	1.10 — 1.17
III	1.30 — 1.50
IV	1.75 — 2.00
V	2.85 — 3.33

получаем по указанной выше формуле средние показатели прозрачности для этих полос, соответственно принятому содержанию водяных паров, а именно:

	p_λ
I	0.843
II	0.435
III	0.202
IV	0.122
V	0.000

* Sleator a. Phelps. The fine structure of the near infra red absorption bands of water-vapor. Astroph. Journ., July, 1925.

При выводе этих величин коэффициенты прозрачности для непрерывной части спектра брались согласно нормальной кривой Вильзинга. * Учитывая теперь поглощение света в теллурических полосах, согласно этим коэффициентам, вычисляем по нашим формулам величины $p_{2,3}$, $p_{3,4}$ и т. д., при-



Фиг. 7. 27 VIII 1928.

меняя данное выше для p_λ эмпирическое выражение, в котором мы берем согласно Вильзингу $b = 0.288$.

В сущности эта формула может служить только до $\lambda = 0.45\,\mu$. В промежутке от $\lambda = 0.30\,\mu$ до $\lambda = 0.45\,\mu$, берем для p_λ согласно Фоулю по его формуле

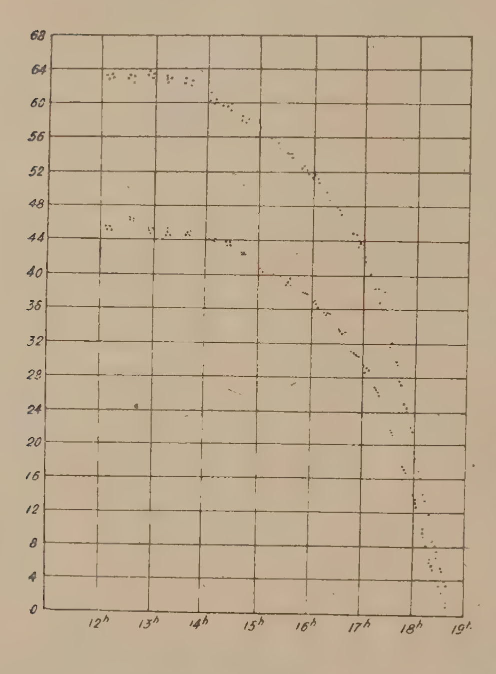
$$p_\lambda = a^{\frac{B}{620}} a_w^{w},$$

* Potsd. Publ., № 72, p. 88.

где B атмосферное давление, принятое равным 760 мм и w слой воды, эквивалентный содержащимся в атмосфере парам; a и a_w даются табл. № 553 Smithsonian Physical Tables.

Для различных a вычисляем теоретическое значение показателя прозрачности, рассчитанного на единицу толщи атмосферы при различных зенитных расстояниях солнца. Имеем напр. при $a = -0.02214$.

$m, m+1$	2—3	3—4	4—5	5—6	6—7	7—8	8—9	9—10
$p_{m\ m+1}$ (выч.). . . .	0.852	.868	.878	.885	.891	.896	.899	.901
$p_{m,\ m+1}$ (набл.). . . .	0.843	.866	.878	.886	.892	.897	.901	.907



Фиг. 8. 28 VIII 1928.

Согласие в общем получается удовлетворительное, но если даже принять во внимание некоторую неправильность в ходе наблюденных величин, теоретические значения $p_{m,\ m+1}$ показывают несколько меньший ход, чем наблюденные. Этот ход может быть легко изменен соответствующим подбором фактора b и потому не подлежит сомнению, что развиваемые простые соображения действительно вполне представляют ход показателя прозрачности. Нужно заметить, что при выводе этих результатов мною было сделано неосновательное допущение, именно, что распределение энергии в непрерывной части спектра следует формуле Планка при 6000° К. Если бы в рассмотрение была бы введена действительная кривая распределения энергии, как она получается из наблюдений, результаты могли бы получиться еще более удовлетворительными.

Произведенное исследование показывает, что действительно показатель прозрачности в монохроматических лучах является постоянным, если только атмосфера находится в неизменяемом состоянии.

3. Экстраполирование на границу атмосферы. Наблюдения показывают, что ход $\log J$ в функции m мало отличается от прямой линии. Можно, поэтому, получив из наблюдений те и другие величины усереднять их в довольно обширных пределах, придавая, вообще говоря, бóльший вес части кривой при меньших m, как более важной для экстраполирования на границу атмосферы.

В случае наших наблюдений, я достигал этого путем усереднения в промежутках неодинаковой величины, между которыми заключалось примерно одинаковое количество отсчетов, именно в толщах атмосферы m:

до 1.25; 1.25—1.50; 1.50—2.00; 2.00—3.00; 3.00—6.00; 6.00—до конца.

В результате по 5—6 точкам получаем плавную кривую

$$\log J = f(m).$$

При неизменяемом состоянии атмосферы ход ее должен быть совершенно плавным. Для удобства интерполирования на промежуточные значения m, нетрудно вычислить кривую

$$\log J = \alpha + \beta m + \gamma m^2 + \delta m^3 + \cdots$$

или просто провести ее графически.

Согласно полученным выше результатам, наблюдения представляются формулой

$$J = C \int_0^\infty E_{\lambda, T} e^{\frac{am}{\lambda - b}} d\lambda,$$

где $E_{\lambda, T}$ представляет распределение энергии в спектре солнца в совершенно произвольных единицах. Представляя ее в виде

$$\log J = \log C + \log \int_0^\infty E_{\lambda, T} e^{\frac{am}{\lambda - b}} d\lambda,$$

мы должны найти постоянные величины a и b, считая, что коэффициент пропорциональности C также является неизвестной величиной. Это может быть сделано путем последовательных приближений.

53*

Наиболее простой путь для этого следующий. Прежде всего выбираем на кривой

$$\log J = f(m)$$

три наиболее характерные точки, например в самом начале, середине и конце, которые определяли бы не только наклон кривой, но также и ее кривизну. Принимаем, затем, для распределения энергии в солнечном спектре наиболее вероятный ход, лучше всего согласно непосредственным наблюдениям Аббота или какого-либо другого автора; далее, для одного определенного значения a и для разных значений b вычисляем p_λ для равноотстоящих величин λ. Это дает возможность вычислить интегралы

$$\int_0^\infty E_{\lambda, T} e^{\overline{\lambda - b}^{am}} d\lambda$$

для разных толщ атмосферы, для разных b и для определенного a, другими словами построить семейство кривых типа $\log J = f(m)$. Подобное вычисление достаточно провести раз навсегда, поскольку для распределения энергии в солнечном спектре мы принимаем всегда одно и то же.

Будем рассматривать теперь две первые точки, выбранные на кривой радиации.

Если, как нужно ожидать, падение второй точки по отношению к первой не будет соответствовать вычисленному при указанном значении a, то на основании уже вычисленных кривых немедленно получаем падение аналогичной кривой при другом значении a. Действительно a входит всегда в виде произведения с m. Изменяя m, мы получим те же результаты, если бы соответственно изменили a. Следовательно, разности ординат, снятые с тех же самых теоретических кривых, но при других значениях m дадут соответствующие кривые при новом значении a и при прежних m. Весьма просто рассчитать, насколько нужно изменить величину a, положенную в вычисление упомянутого семейства кривых, для того чтобы добиться полного согласия в разности ординат между первой и второй точками, как наблюденной, так и вычисленной кривой при различных значениях b. Теперь вводим в рассмотрение третью точку. Падение ее по отношению к первым двум будет для всех теоретических кривых отличаться от действительности, но для одних она будет лежать ниже действительно наблюдаемой, для дру-

гих, напротив, несколько выше. Простое интерполирование определяет то значение b, при котором и эти точки совпадут между собой. Каждая из теоретических кривых, приведенная в совпадение с наблюдаемой по первым двум точкам, дает различные значения a. Получая теперь интерполированием фактор b, при котором представляется и третья точка наблюдаемой кривой солнечной радиации, необходимо, очевидно, сделать соответствующее интерполирование и для a, т. е. определить то a, которое соответствует выбранному окончательно значению b. Обработка подобного рода может быть произведена довольно быстро, если имеется только три точки. Поэтому ежедневные наблюдения целесообразнее, обрабатывая по этому способу, соединять только в три отдельные группы и даже, если наблюдения ведутся при помощи актинометров без автоматической регистрации, располагать отсчеты преимущественно в области наименьших зенитных расстояний, средних и, наконец, наибольших.

В случае обработки длинных рядов наблюдений в полученные описанным образом предварительные значения a и b можно ввести поправки, определяемые, например, по способу наименьших квадратов, чего при обычной работе можно было бы и не делать. Обозначая

$$f(a,b) = \log \int E_{\lambda,\,T}\, e^{\frac{am}{\lambda-b}}\, d\lambda,$$

имеем для определения поправок следующее выражение

$$\log J = \log C + f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db$$

или

$$\log J = \log C + f(a,b) + \frac{\int E_{\lambda,\,T}\, c^{\frac{am}{\lambda-b}} \frac{m}{\lambda-b}\, d\lambda}{\int E_{\lambda,\,T}\, e^{\frac{am}{\lambda-b}}\, d\lambda} + $$

$$+ \frac{\int E_{\lambda,\,T}\, e^{\frac{am}{\lambda-b}} \frac{am}{(\lambda-b)^2}\, d\lambda}{\int E_{\lambda,\,T}\, e^{\frac{am}{\lambda-b}}\, d\lambda}.$$

Интегралы, находящиеся в знаменателе, могут быть получены при помощи ранее вычисленного семейства кривых. Интегралы в числителе находятся вычислением, которое подобно предыдущему, можно сделать раз навсегда, расположив результаты в виде достаточно удобных для употребления таблиц по двум аргументам m и b.

В результате получается наиболее удовлетворительное представление наблюдаемой кривой изменения радиации в функции зенитного расстояния солнца с точностью до коэффициента пропорциональности. Этот коэффициент, который теоретически должен получиться совершенно одинаковым из сравнения любых точек наблюдаемой и теоретической кривых, а фактически не должен иметь никакого систематического хода, получается как среднее арифметическое по всем усередненным точкам кривой радиации, входящим в рассмотрение выше. После этого солнечная постоянная получается из простого выражения

$$J_0 = C\int_0^\infty E_{\lambda,\,T}\,d\lambda,$$

к которому нужно только придать поправку для редукции на единицу расстояния от солнца.

Указанный способ имеет тот недостаток, что при этом не учитывается влияние полос селективного поглощения, зависящих главным образом от наличия водяного пара. Учесть их какими-либо метеорологическими наблюдениями не представляется возможным, так как невозможно знать из наблюдений в месте нахождения наблюдателя, как располагаются водяные пары на всем протяжении траектории светового луча. Единственный прямой путь заключается в получении спектроболограмм, как это и практикуется Абботом. Это, однако, совершенно недоступно огромному большинству наблюдателей. В виду невозможности учесть влияние селективного поглощения лучше всего его исключить совсем, путем применения соответствующего фильтра, отрезывающего всю инфракрасную часть спектра. Таким фильтром, по крайней мере на летний период, может служить стеклянная ванночка с плоско параллельными стенками, наполненная дистиллированной водой. Введение подобного фильтра желательно еще и потому, что формула

$$p_\lambda = e^{\frac{am}{\lambda - b}}$$

не представляет, конечно, действительный ход показателя прозрачности с длиной волны на всем протяжении спектра: для крайних красных, как и для крайних фиолетовых частей она неприменима. Можно, конечно, применять ее не обращая внимания на это обстоятельство, но тогда представление наблюдаемой кривой радиации лишится своего физического смысла и будет аналогично простому подбору интерполяционной кривой со всею неопределенностью, которая отсюда вытекает для вывода окончательного результата.

С другой стороны, применение фильтра имеет тот недостаток, что он предполагает знание распределения энергии в спектре данного источника света, — в данном случае солнца. При изменении этого распределения изменяется также и пропускная способность фильтра. Это, впрочем, является общим слабым местом, так как земная атмосфера сама по себе также является своего рода фильтром и, как мы видели, вывод точного значения солнечной постоянной невозможен без знания этого распределения.

4. Водяной фильтр. Фильтр с дистиллированной водой помещался перед отверстием актинометра Михельсона, причем в случае надобности мог быть легко устранен. Попеременно в симметричном порядке солнечная радиация регистрировалась то непосредственно, то через водяной фильтр. Для исследования его пропускной способности были применены различные способы. Во-первых, фотографический способ при помощи спектрографа Цейсса Гос. Астрофизического института. Пропустив свет от лампочки накаливания через систему из двух николей, я многократно фотографировал на той же панхроматической пластинке получающиеся при этом спектры при различных углах между плоскостями поляризации николей. Кроме того, фотографировался также спектр, полученный через фильтр при определенном положении николей. Все экспозиции делались строго в симметричном порядке для исключения возможных колебаний в яркости лампочки. Спектром сравнения служила ртутная лампа, отчасти Фраунгоферовы линии солнечного спектра. Измерения фотографий производились на микрофотометре Гартмана Астрофизического института. Для различных участков спектра строились для каждой пластинки характеристические кривые и в результате этой довольно долгой процедуры получались отношения яркостей спектра для разных λ с фильтром и без него, что и определяло искомый показатель прозрачности. Другой способ исследования водяного фильтра — применение известного спектрофотометра Кёнига. Таким образом можно получить на всем протяжении видимой области спектра довольно высокую степень

точности, так как наблюдения производятся легко и уверенно. Шкала спектрофотометра была тщательно исследована мною отчасти при помощи ртутной лампы, но главным образом при помощи непрерывного спектра от лампочки накаливания. Тщательно выверив спектрограф Цейсса и снабдив его вместо фотографической пластинки экраном с узкой щелью, мы получили нечто вроде монохроматора, позволяющего выделять из непрерывного спектра любую длину волны. Каллибровка шкалы спектрофотометра Кёнига могла, поэтому, быть произведена через сколь угодно малые интервалы, полностью покрывающие весь спектр в его визуальной части.

Что касается инфракрасной части спектра, то для исследования ее был применен термоэлемент Цейсса в соединении с петельным гальванометром, поставленным на наибольшую чувствительность. При помощи того же спектрографа Цейсса радиация пропускалась через уже упомянутую узкую щель, и следуя за нею в виде расходящегося пучка, падала на позолоченное зеркальце термоэлемента, после отражения от которого собиралась на чувствительном спае. Опыт показал, что даже Вольтова дуга не дает достаточного отклонения нити гальванометра, не говоря уже про то, что она не является постоянной для возможности подобного рода определений. Повидимому, только солнечный спектр мог бы доставить необходимое количество энергии. В виду неудобства пользования подобным источником света, в особенности в зимнее время, когда производилась обработка наших наблюдений, было решено воспользоваться исследованиями Петтита (Pettit) над прозрачностью водяного фильтра совершенно аналогичного характера. Мною была определена эквивалентная толща моего фильтра по отношению к исследованному Петтитом* и таким путем была дополнена кривая прозрачности водяного фильтра в сторону инфракрасных лучей.

Были получены следующие результаты:

λ	0.30	0.34	0.38	0.50	0.62	0.74	0.86	0.94	0.98	1.02	1.10	1.18	1.26
$p\lambda$	0.000	.770	.815	.848	.855	.848	.810	.585	.460	.577	.629	.136	.120

Как отсюда видно, прозрачность водяного фильтра практически равная нулю при 0.3 μ держится довольно высокой и почти постоянной во всей видимой и в ближайшей инфракрасной части спектра, далее дает значительное уменьшение при 0.98 μ и доходит до нуля при 1.4 μ, оставаясь крайне незначительной между 1.2 и 1.4 μ.

* Pettit. Transmission properties of some filters. Contr. M. Wilson. Observ., № 336.

Обозначая коэффициент прозрачности фильтра через p_λ' имеем для наблюдаемой через фильтр радиации при толще атмосферы m,

$$J' = C\int_0^\infty E_{\lambda, T} p_\lambda' e^{\frac{am}{\lambda - b}} d\lambda. \tag{1}$$

Совершенно таким же способом как и раньше, можно проэкстраполировать это выражение на границу атмосферы, причем получается

$$J_0' = C\int_0^\infty E_{\lambda, T} p_\lambda' d\lambda. \tag{2}$$

Это выражение по причинам, изложенным выше, выводится гораздо более уверенным образом. Теперь нужно разрешить вопрос, как избавиться от поглощения в фильтре и получить солнечную постоянную. Для этого необходимо знать распределение энергии в солнечном спектре.

5. Исследование распределения энергии в солнечном спектре. Прежде всего поставим вопрос, насколько погрешность в функции $E_{\lambda, T}$, определяющей распределение энергии в солнечном спектре, сказывается на определении солнечной постоянной при переходе от выражения (1) к (2). Предположим для простоты, что $E_{\lambda, T}$ задается кривой Вина и что температура солнца известна только приблизительно. Далее предположим, что водяной фильтр имеет совершенно одинаковую прозрачность от крайних ультрафиолетовых лучей до некоторой длины волны λ_1, лежащей в инфракрасной части спектра, после которой прозрачность делается равной нулю, т. е.

$$p_\lambda = \text{const}, \quad \text{если } \lambda < \lambda_1,$$
$$p_\lambda = 0, \quad \text{если } \lambda \geqslant \lambda_1.$$

Прежде всего нужно поставить вопрос насколько изменится отношение

$$F(T) = \frac{\int_0^\infty \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}} p_\lambda' d\lambda}{\int_0^\infty \lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}} d\lambda} = \frac{J_0'}{J_0}$$

при изменении температуры T.

Величину J_0' находим из наблюдений, J_0 необходимо найти. Полагая

$$x = \frac{c}{\lambda T},$$

находим

$$\Delta \log F(T) = \frac{\Delta T}{T}\left[\frac{\int\limits_{x_1}^{\infty} x^4 e^{-x}\,dx}{\int\limits_{x_1}^{\infty} x^3 e^{-x}\,dx} - \frac{\int\limits_{0}^{\infty} x^4 e^{-x}\,dx}{\int\limits_{0}^{\infty} x^3 e^{-x}\,dx}\right]$$

или

$$(3) \qquad \Delta \log F(T) = \frac{\Delta T}{T} \cdot \frac{x_1^4}{x_1^3 + 3x_1^2 + 6x_1 + 6}$$

и

$$\Delta F(T) = \Delta \frac{J_0'}{J_0} = \frac{\Delta T\, x^4 e^{-4}}{6T}.$$

Для относительной погрешности в указанном отношении имеем выражение (3). Если предположить, что температура солнца равна 6000° K и давать λ_1 последовательно различные значения, то получаем

$$\Delta \log \frac{J_0'}{J_0} = \begin{cases} 0.3\,\Delta T & \text{при } x_1 = 4; \quad \lambda_1 = 0.6\,\mu \\ 0.07 & \qquad\quad 2 \qquad\quad 1.2 \\ 0.01 & \qquad\quad 1 \qquad\quad 2.4, \end{cases}$$

причем ΔT выражено в тысячах градусов.

С водяным фильтром при погрешности T в 1000° ошибка в определении солнечной постоянной на основании J'_0 полученного из наблюдений будет около 7%. Хотя эта ошибка не особенно велика, тем не менее очевидно, что распределение энергии в солнечном спектре необходимо знать с возможно большей степенью точности.

Для определения распределения энергии в солнечном спектре мною были обработаны наблюдения Аббота,* относящиеся к разным длинам волн и к разным расстояниям от центра солнечного диска. Приведем эти данные.

* Ann. Astroph. Obs. Smith. Instit., vol. III, p. 159.

№	λ	Расстояние от центра в частях радиуса									
		0.00	0.20	0.40	0.55	0.65	0.75	0.825	0.875	0.92	0.95
1	0.323 μ	144	140	129	120	112	99	86	76	64	49
2	0.386	338	331	312	289	267	240	214	188	163	141
3	0.433	456	447	423	395	368	333	296	266	233	205
4	0.456	515	507	486	455	428	390	351	317	277	242
5	0.481	511	503	483	456	430	394	358	324	290	255
6	0.501	489	482	463	437	414	380	347	323	286	254
7	0.534	463	457	440	417	396	366	337	312	281	254
8	0.604	399	395	382	365	348	326	304	284	259	237
9	0.670	333	330	320	308	295	281	262	247	227	210
10	0.699	307	304	295	284	273	258	243	229	212	195
11	0.866	174	172	169	163	159	152	145	138	130	122
12	1.031	111	110	108	105.5	103	99	94.5	90.5	86	81
13	1.225	77.6	77.2	75.7	73.8	72.2	69.8	67.1	64.7	61.6	58.7
14	1.655	39.5	39.4	38.9	38.2	37.6	36.7	35.7	34.7	33.6	32.3

Предположим, что распределение энергии в солнечном спектре может быть представлено формулой Планка. Имеем, следовательно

$$\log E_{\lambda, T} = \log C - 5 \log \lambda - \frac{c}{\lambda T} \log e - \log \Delta,$$

где

$$\Delta = 1 - e^{-\frac{c}{\lambda T}}.$$

Полагая

$$\log C = x; \quad \frac{c}{T} \log e = J,$$

имеем

$$x - \frac{y}{\lambda} = \log E_{\lambda, T} + 5 \log \lambda + \log \Delta = n.$$

Последовательными приближениями получаем из 14 условных уравнений для каждого расстояния от центра солнечного диска следующее:

$r = 0.0$	$\log C = 3.198$	$\frac{c}{T} = 2.4218$	$T = 5913°$
0.2	3.200	2.4313	5890
0.4	3.207	2.460	5820
0.55	3.206	2.487	5760
0.65	3.206	2.515	5700
0.75	3.212	2.560	5590
0.825	3.220	2.616	5470
0.875	3.218	2.656	5390
0.92	3.220	2.714	5280
0.95	3.236	2.795	5120

Подстановка x и y в отдельные уравнения дает представление о действительном распределении энергии в спектре. Приведем эти отклонения для трех точек солнечного диска.

	$r = 0.0$			$r = 0.55$			$r = 0.875$		
	n	n'	$n - n'$	n	n'	$n - n'$	n	n'	$n - n$
1	−0.302	−0.068	−234	−0.381	−0.148	−243	−0.579	−0.364	−215
2	+.461	.473	−12	+.393	.408	−15	+.207	.230	−23
3	.840	.770	70	.779	.713	66	.607	.555	52
4	1.005	.892	113	.951	.838	113	.795	.689	106
5	1.115	1.012	103	1.066	.961	105	.918	.820	98
6	1.185	1.099	86	1.136	1.051	85	1.006	.916	90
7	1.299	1.228	71	1.254	1.184	70	1.129	1.058	71
8	1.498	1.457	41	1.460	1.418	42	1.352	1.308	44
9	1.640	1.628	12	1.608	1.594	14	1.515	1.496	21
10	1.695	1.693	2	1.663	1.661	2	1.572	1.568	4
11	1.901	1.983	−82	1.875	1.959	−84	1.807	1.886	−79
12	2.068	2.178	−110	2.049	2.159	−110	1.988	2.099	−111
13	2.265	2.340	−75	2.248	2.325	−77	2.398	2.277	−79
14	2.576	2.563	13	2.566	2.554	12	2.536	2.521	15

Интересно прежде всего отметить, что на всех расстояниях от центра солнечного диска получаются практически одинаковые отклонения от действительности. Следовательно, результаты не будут ухудшены, если подбор кривой Планка будет производиться для интегрального спектра солнца, образуемого всеми точками солнечного диска одновременно.

Расхождения, приводимые выше, довольно велики и носят систематический характер. Поэтому приводимые выше температуры не имеют реального значения. Достаточно взять точки в спектре несколько в иной группировке или отбросить некоторую часть спектра, чтобы получить совершенно другие результаты. Если, например, отбросить точку № 1 с $\lambda = 0.322$, то получаем для центра солнца $T = 6390°$, значительно больше чем прежде, причем представление остальных наблюдений остается таким же плохим, как и прежде.

Количество радиации для любой длины волны, исходящее от всего солнечного диска, представляется выражением

$$2\pi \int E_{\lambda, T, r}\, r\, dr.$$

При помощи графической интерполяции получаем на основании приведенных выше данных значения $E_{\lambda, T, r}$ через равные интервалы в r^2,

откуда находим путем механической интеграции распределение энергии в солнечном спектре в некоторых произвольных единицах. Именно:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
λ	0.322	0.386	0.433	0.456	0.481	0.501	0.534	0.604	0.670	0.699	0.866	1.031	1.225	1.655
$E_{\lambda, T}$	984	2425	3340	3878	3924	3800	3657	3247	2781	2568	1509	982	697	362

Поскольку одной кривой Планка невозможно представить солнечный спектр на всем его протяжении, мною производились попытки представления его по отдельным частям. После различных проб я, наконец, нашел, что наилучшие результаты получаются, если солнечный спектр разбить на три части: от крайней ультрафиолетовой части до максимума энергии (точки №№ 1—4), далее до 0.866 μ (точки №№ 4—11) и, наконец, все остальные в инфракрасной области. Результаты получились следующие:

А. №№ 1—4. Нормальные уравнения:

$$\begin{matrix} 4x - 10.199\, y = 5.442 \\ +26.500 \quad -13.143 \end{matrix} \quad x = 5.152;\ y = 1.487;\ T = 4181^\circ.$$

Представление:

n	0.533	1.318	1.707	1.884
$n - n'$	0.000	0.019	—0.012	—0.007

В. №№ 4—11. Нормальные уравнения:

$$\begin{matrix} 8x - 13.876\, y = 18.555 \\ 24.977 \qquad 31.341 \end{matrix} \quad x = 3.928;\ y = 0.9274;\ T = 6705^\circ.$$

Представление:

n	1.880	2.000	2.074	2.194	2.406	2.557	2.613	2.831
$n - n'$ . . .	—0.014	0.000	—0.003	0.003	0.014	0.014	0.022	—0.026

С. №№ 11—14. Нормальные уравнения:

$$\begin{matrix} 4x - 3.545\, y = 12.712 \\ 3.306 \qquad 11.049 \end{matrix} \quad x = 4.350;\ y = 1.323;\ T = 4700^\circ.$$

Представление:

n	2.854	3.035	3.245	3.578
$n - n'$	0.032	—0.032	—0.035	0.027

Таким образом соответственно выбранной части солнечного спектра имеем три различные температуры, сравнительно удовлетворительно представляющие действительное распределение энергии:

№№ 1—4	№№ 4—11	№№ 11—14
4181°	6705°	4700°

Контроль полученных результатов может быть сделан путем определения температуры для каждой точки спектра в отдельности при помощи так наз. градиента. Под градиентом будем подразумевать производную

$$G_\lambda = \frac{d \log E_{\lambda, T}}{d\lambda},$$

причем если исходить из формулы Планка

$$E_{\lambda, T} = C_\lambda^{-5} e^{-\frac{c}{\lambda T}} \left(1 - e^{-\frac{c}{\lambda T}}\right)^{-1},$$

то

$$G_\lambda = -\frac{5}{\lambda} + \frac{c}{T}\frac{1}{\lambda^2} - \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda},$$

где

$$\Delta = \log\left(1 - e^{-\frac{c}{\lambda T}}\right).$$

Находим

$$\frac{c}{T\lambda} = \left(5 + \frac{\lambda}{M} G_\lambda\right)\left(1 - e^{-\frac{c}{\lambda T}}\right),$$

откуда путем последовательных приближений получаем $\frac{c}{T}$ и T.

Для вычисления производной G_λ пользуемся формулой, которую получаем из общей интерполяционной формулы Ньютона, именно:

$$f'(\lambda) = f(a_0, a_1) + \left(a_2 - \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3}\right) f(a_0, a_1, a_2) + \cdots$$

если λ, для которого вычисляется производная, есть среднее арифметическое из трех смежных длин волн a_0, a_1, a_2 и функции

$$f(a_0, a_1) = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}; \quad f(a_0, a_1, a_2) = \frac{f(a_1, a_2) - f(a_0, a_1)}{a_2 - a_0}$$

суть «разделенные» разности первого и второго порядка, получаемые на основании значений $\log E_{\lambda, T}$, которые берутся, вообще говоря, через неравные интервалы.

Как известно, Аббот и его сотрудники особенно тщательно производили исследование распределения энергии в солнечном спектре в первый период своих актинометрических наблюдений, так как предполагалось, что знание этого необходимо для точного определения солнечной постоянной. В дальнейшем интерес к этому значительно ослабел, особенно после того, как выяснилась возможность, не понижая точности результатов, пользоваться средней кривой $E_{\lambda, T}$, определенной раз навсегда.

Все основные наблюдения Аббота* были произведены в период с 1903 по 1910 г. в Вашингтоне, М. Вильсоне и М. Уайтнее на высотах соответственно 10, 1780 и 4420 м над уровнем моря. Ниже дается сводка определений Аббота и далее в столбцах 4, 5 и 6 той же таблицы результаты моих вычислений согласно приведенным выше формулам. Каждое значение температуры или соответствующего колор-эквивалента основано на трех смежных значениях энергии в солнечном спектре. Длина волны λ_c, к которой относится соответствующее значение T дана в последнем столбце.

λ	$E_{\lambda, T}$	Вер. ош. в %	$5 + \frac{\lambda}{M} G_\lambda$	$\frac{c}{T}$	T	λ_c
0.35	2684	8.5	12.00	4.20	3410	0.350
0.375	3459	2.7	7.565	2.805	5100	0.372
0.39	3614	1.7	8.250	3.25	4400	0.395
0.42	5251	1.3	8.200	3.39	4230	0.413
0.43	5321	1.7	6.896	2.98	4800	0.433
0.45	6027	1.4	6.792	3.04	4700	0.450
0.47	6240	1.8	5.133	2.41	5930	0.473
0.50	6062	1.9	4.365	2.18	6560	0.507
0.55	5623	2.1	3.986	2.15	6660	0.550
0.60	5042	2.1	3.283	1.93	7400	0.617
0.70	3644	0.4	2.765	1.78	8020	0.700
0.80	2665	1.2	2.745	2.10	6800	0.833
1.00	1657	0.7	2.735	2.59	5510	1.033
1.30	898	0.7	2.54	2.96	4830	1.300

В 1916—1918 гг. Аббот** повторил те же наблюдения при помощи нового вакуумного болометра, снабженного стеллитовыми зеркалами (стел-

* Ann. Astroph. Obs. Smith. Inst., vol. III, p. 194, а также Astroph. Journ., vol. 34, p. 197.

** Annales etc., vol. IV, p. 199.

лит — сплав хрома, кобальта и вольфрама). Отражательная способность стеллита не особенно велика (около 60%), но он отличается, по словам Аббота, необыкновенным постоянством. Однако только в 1919 г. Альдрих* исследовал чувствительность нового спектроболографа по отношению к старому, с которым производились наблюдения 1903—1910 гг., упомянутые выше. Оказалось, что оба прибора дают разные результаты в разных частях спектра. Аббот считает, хотя быть может и без достаточных оснований, что именно новый болометр дает неправильные результаты, старый же совершенно свободен от систематических погрешностей. Поэтому при обработке наблюдений 1916—1918 гг. им была сделана редукция на старый болометр. Тем не менее эти наблюдения после дальнейшей редукции их за селективное отражение в стеллитовых зеркалах, селективное поглощение в оптических частях инструмента и в атмосфере систематически отличаются от прежних.

Представляет интерес вычислить температуры для разных участков спектра и на основании наблюдений Аббота 1916—1918 гг. Для простоты образуем сначала разности Δ между обеими сериями наблюдений. Выглаживая графически логарифмы этих разностей, снимаем их с кривой через равные интервалы в λ именно в 0.04 μ и ограничиваясь разностями не свыше второго порядка вычисляем производные. Далее из соотношения

$$5+\frac{\lambda}{M}G_2=5+\frac{\lambda}{M}G_1+\frac{\lambda}{M}\frac{d\log\Delta}{d\lambda},$$

в котором первый член правой части берем на основании предыдущих вычислений несколько выглаживая их графически, находим

$$5+\frac{\lambda}{M}G_2,$$

по которому определяем искомые температуры.

λ	$5+\frac{\lambda}{M}G_\lambda$ (1)**	(2)	$\left(\frac{c}{T}\right)_1$	$\left(\frac{c}{T}\right)_2$	T_1	T_2
0.34	13.1	12.5	4.45	4.25	3220	3360
.38	9.50	8.91	3.61	3.39	3970	4230
.42	7.38	6.72	3.06	2.82	4690	5100

* Ibidem, p. 202.

** Значек (1) относится к старым, значек (2) — к новым наблюдениям Аббота.

λ	$5+\frac{\lambda}{M}G_\lambda$		$\left(\frac{c}{T}\right)_1$	$\left(\frac{c}{T}\right)_2$	T_1	T_2
.46	5.71	5.31	2.56	2.32	5610	6180
.50	4.73	4.48	2.34	2.22	6130	6460
.54	4.08	4.08	2.16	2.16	6640	6640
.58	3.60	3.90	2.02	2.21	7100	6490
.62	3.22	3.72	1.90	2.24	7520	6390
.66	2.96	3.45	1.83	2.19	7820	6550
.70	2.80	3.32	1.81	2.22	7920	6440
.74	2.70	3.04	1.83	2.12	7840	6740
.78	2.69	2.91	1.92	2.12	7460	6760
.82	2.65	2.84	1.98	2.16	7240	6630
.86	2.62	2.78	2.04	2.20	7000	6500
.90	2.60	2.70	2.12	2.22	6760	6450
1.02	2.60	2.79	2.40	2.63	5970	5450
1.30	2.58	2.64	3.02	3.12	4750	4600

Мы видим, что различие между обеими сериями наблюдений довольно значительно. Однако в полном согласии с прежними результатами кривая распределения энергии в солнечном спектре дает все меньшие значения температуры по мере перехода к инфракрасной части.

6. Обработка наблюдательного материала и вывод солнечной постоянной. Из наших наблюдений были отобраны наилучшие дни без заметных неправильностей в ходе кривой радиации, именно 5, 25, 27, 28 и 29 VIII 1928 г., причем в четырех из них наблюдения велись до и после полудня. На основании зенитных расстояний, которые отсчитывались по вертикальному кругу актинометра Михельсона и исправлялись за погрешность нуль-пункта, определенной по известному склонению солнца и широте места наблюдений, были получены для каждого отсчета соответствующие толщи атмосферы. Эти толщи брались по таблицам, составленным согласно теории Бемпорада.*

Так как ход кривой радиации (log J в функции m) мало отличается от прямой линии, можно образовать нормальные места, беря средние арифметические для промежутков в толщах атмосферы: до 1.25: 1.25—1.50; 1.50—2.00; 2.00—3.00; 3.00—6.00; 6.00 — до конца. В нижеследующей таблице даются эти средние величины для дней с правильным ходом радиации для наблюдений без фильтра и с фильтром в отдельности (n — число отдельных определений).

* E. Schoenberg. Theoretische Photometrie, p. 268. Handbuch der Astrophysik, Bd. II, 1

5 VIII фильтр

log J	m	n	log J	m	n
1.686	3.163	6	1.538	3.243	4
1.739	2.331	14	1.580	2.558	12
1.818	1.343	4	1.620	1.979	4
1.831	1.175	16	1.684	1.342	4
1.824	1.171	12	1.697	1.175	16
1.806	1.316	8	1.695	1.172	12
1.765	1.741	4	1.672	1.316	8
			1.624	1.749	4

25 VIII фильтр

log J	m	n	log J	m	n
1.668	3.922	12	1.520	3.92	12
1.756	2.484	16	1.613	2.481	16
1.796	1.747	16	1.662	1.746	16
1.823	1.398	6	1.684	1.465	6
1.831	1.230	6	1.695	1.228	8
1.808	1.438	12	1.669	1.439	12
1.778	1.841	12	1.641	1.841	12
1.739	2.386	16	1.597	2.390	16
1.663	3.621	12	1.516	3.618	12

27 VIII фильтр

log J	m	n	log J	m	n
1.500	7.786	10	1.312	8.213	11
1.666	4.234	16	1.517	4.237	16
1.774	2.356	12	1.634	2.351	12
1.807	1.742	17	1.671	1.718	20
1.827	1.388	10	1.689	1.361	8
1.833	1.239	14	1.696	1.239	16
1.821	1.335	22	1.685	1.338	21
1.780	1.852	16	1.641	1.835	16

29 VIII фильтр

log J	m	n	log J	m	n
1.822	1.312		1.686	1.309	
1.792	1.719		1.655	1.719	
1.741	2.445		1.596	2.439	
1.608	4.264		1.442	4.362	
1.290	9.864		1.0715	9.980	
1.824	1.319		1.689	1.323	
1.784	1.762		1.648	1.746	
1.730	2.412		1.593	2.372	
1.606	4.254		1.457	4.252	
1.135	10.452		0.9664	9.893	

28 VIII фильтр

log J	m	n	log J	m	n
1.796	1.330	27	1.653	1.336	28
1.754	1.714	17	1.611	1.730	16
1.700	2.387	17	1.556	2.355	16
1.564	4.165	17	1.410	4.144	18
1.261	8.31	11	1.087	8.035	10

Для вывода солнечной постоянной согласно развитым выше соображениям я взял средний ход кривой радиации по данным этой таблицы. Так как различие между отдельными сериями наблюдений носит систематический, но не случайный характер, нормальные места каждого дня очевидно должны войти в общее среднее с одинаковым весом независимо от количества отдельных наблюдений. Имеем следующее:

без фильтра		с фильтром	
log J	m	log J	m
1.8297	1.204	1.696	1.204
1.816	1.353	1.679	1.359
1.782	1.764	1.641	1.787
1.740	2.400	1.596	2.421
1.637	3.946	1.486	3.968
1.296	9.10	1.109	9.03

Нужно отметить, что ход этих средних величин не может быть совершенно плавным потому, что не все отдельные кривые, из которых он составляется, были представлены во всех промежутках по m.

Ход распределения энергии в солнечном спектре берется на основании данных Аббота, как они были приведены ранее (стр. 16). Начиная с 1.3 μ этот ход принимается следующим по кривой Планка с температурой в 4700° K, согласно нашим предыдущим результатам. В ультрафиолетовой части падение радиации принималось согласно кривой Планка с температурой в 4200° K.

Для наблюдаемой области спектра имеем:

λ	0.30	0.34	0.38	0.42	0.46	0.50	0.54	0.58	0.62	0.66	0.70	0.74	0.78
E_λ . . .	646	1294	2203	3090	3873	3846	3597	3373	3126	2851	2570	2265	1995
p_λ' . . .	0.000	.770	.815	.830	.842	.848	.853	.855	.855	.854	.852	.848	.842
$E_{\lambda, T} p_\lambda'$.	0.000	995	1797	2560	3255	3260	3060	2880	2670	2435	2190	1920	1680
λ	0.82	0.86	0.90	0.94	0.98	1.02	1.06	1.10	1.14	1.18	1.22	1.26	1.30
E_λ . . .	1746	1542	1365.	1216	1107	1005	916	843	785	740	700	665	610
p_λ' . . .	.830	.810	.760	.585	.460	.577	.685	.629	.220	.136	.130	.120	.110
$E_{\lambda, T} p_\lambda'$.	1446	1248	1039	712	510	580	628	530	172.5	100.5	90.9		

В третьей строке этой таблицы даются показатели прозрачности водяного фильтра для тех же длин волн. На основании сказанного выше, находим

$$\int E_{\lambda, T} p_\lambda' \, d\lambda = 1438.4; \quad \int E_{\lambda, T} \, d\lambda = 2324.1$$

причем эти интегралы распространены на все протяжение солнечного спектра. Отношение этих величин показывает насколько нужно умножить наблюдаемую через водяной фильтр радиацию, отнесенную на отсутствие атмосферы, для того чтобы получить солнечную постоянную. Это отношение составляет 1.616.

Теперь переходим к вопросу о представлении наблюдаемой кривой радиации при помощи указанных выше выражений (стр. 11) с точностью до коэффициента пропорциональности. С этой целью мною были вычислены таблицы, представляющие p_λ для $a = -0.05$ и $b = 0.288$ для толщ атмосферы в 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12 и 16. Вычисления были повторены для $b = 0.368$, 0.208 и 0.128 для тех же толщ атмосферы и того же a. В следующей таблице приводятся результаты вычислений, причем промежу-

точные значения получены интерполированием. В последнем столбце даны результаты наблюдений, снятые с графика, построенного в достаточно большом масштабе. Все числа представляют Бригговы логарифмы. Аддитивная постоянная остается пока неопределенной:

	$a = -0.05$ $b = -0.368$	-0.05 0.288	-0.05 0.208	-0.05 0.128	набл.
$m = 1$	1.711	1.771	1.796	1.809	1.710
2	1.614	1.693	1.737	1.761	1.626
3	1.529	1.621	1.679	1.714	1.552
4	1.451	1.553	1.623	1.667	1.482
5		1.488	1.568	1.622	1.415
6		1.427	1.515	1.577	1.345
7		1.368	1.464	1.532	1.274
8		1.312	1.413	1 489	1.211
9		1.256	1.364	1.445	
10		1.204	1.316	1.403	
11			1.269	1.361	
12				1.320	
13				1.279	
14				1.238	
15				1.199	
16				1.159	

Выбираем теперь, согласно сказанного выше, три точки, представляющие ход кривой радиации. Мы берем их условным образом при $m = 1, 4, 8$. Если наблюдаемые величины привести к первому числу каждого столбца этой таблицы, то будем иметь:

	$b = 0.288$	$b = 0.208$	$b = 0.128$
1	1.771	1.796	1.809
4	1.543	1.568	1.581
8	1.272	1.297	1.310

Для того, чтобы подогнать значение a при $m = 4$ к этим наблюдаемым величинам, нужно взять вместо постоянной a следующие значения в каждом отдельном случае:

$$a = -0.05255 \quad -0.06667 \quad -0.08185.$$

Это равносильно тому, что оставляя a прежним, т. е. -0.05 мы берем вместо $m = 4$ соответственно: 4.154; 5.000; 5.91. Отсюда следует, что для третьей точки при $m = 8$, мы должны условным образом взять про-

межутки в толще атмосферы между второй и третьей точками равными 4.204; 5.332; 6.548 или соответственные толщи

8.358, 10.332, 12.458.

Согласно приведенной выше таблицы находим для этих толщ соответственно

1.292, 1.300, 1.300,

в то время как наблюдаемые величины для тех же точек суть

1.272, 1.297, 1.310.

Итак различия для третьей точки между наблюдаемыми и вычисленными значениями составляют

— 0.020	— 0.003	+ 0.010	при b равном
0.288	0.208	0.128.	

Для того, чтобы и третьи точки совпали, необходимо, как показывает простая интерполяция, чтобы $b = 0.190$.

Но величина коэффициента, на который нужно умножить прежнее значение a, т. е. — 0.05. для того, чтобы получить новое, есть в наших трех случаях

1.051 при 0.288
1.333 » 0.208
1.637 » 0.128.

Следовательно при полученном нами значении b этот коэффициент составляет 1.40. Отсюда получаем, что предварительные величины a и b суть

— 0.070 и 0.190.

С этими величинами постоянных были снова вычислены для разных толщ атмосферы показатели прозрачности по формуле

$$p_\lambda = e^{\frac{am}{\lambda - b}}$$

и затем величины

$$\int E_{\lambda, T}\, p_\lambda{}'\, e^{\frac{am}{\lambda - b}}\, d\lambda$$

совершенно аналогично предыдущему для $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Путем интерполяции с учетом вторых разностей находим, наконец, следующее представление наблюдаемых величин $\log J$, данных в приведенной табличке:

m	$\log J$ (набл.)	$\log J$ (выч.)	набл.-выч.
1.204	1.696	1.761	—0.065
1.359	1.697	1.749	—0.070
1.787	1.641	1.716	—0.075
2.421	1.596	1.667	—0.071
3.968	1.486	1.554	—0.068

Отсюда в среднем имеем для разности набл.-выч.-$\log C = -0.070$, что представляет логарифм коэффициента пропорциональности при интеграле

$$\int_0^\infty E_{\lambda, T}\, p_\lambda' \, e^{\frac{am}{\lambda - b}} d\lambda.$$

С этим значением C находим выражение

$$C \int_0^\infty E_{\lambda, T}\, d\lambda,$$

вводя поправку за водяной фильтр, как об этом говорилось выше. Это дает значение полной солнечной радиации, как она наблюдается вне земной атмосферы, в отсчетах шкалы актинометра Михельсона. Коэффициент для перевода этой шкалы в калории был определен до и после наблюдений на Тимирязевской актинометрической станции и оказался равным 0.0185. Переводя наш интеграл в калории и редуцируя полученное значение на единицу расстояния земли от солнца, находим для солнечной постоянной в европейской шкале 1.884.

Совершенно аналогичным образом можно обработать наблюдения, произведенные без фильтра. Результат получается, однако, ошибочным, вследствие влияния полос поглощения в инфракрасной части спектра.

7. Дальнейшие соображения относительно определения солнечной постоянной. В предыдущем распределение энергии в солнечном спектре бралось из наблюдений Аббота, другими словами делалось предположение, что функция $E_{\lambda, T}$ постоянна. Для избежания этого следует при помощи того же актинометра Михельсона, желательно, имеющего повышенную чувствительность, измерять солнечную радиацию, пропуская ее через

фильтры, вырезывающие различные участки спектра. В частности желательно применение фильтра, выделяющего определенный участок в инфракрасной области спектра, в месте свободном от полос селективного поглощения. Это даст возможность время от времени контролировать распределение энергии в солнечном спектре в особенности в инфракрасной области, что представляет особенное значение для определения солнечной постоянной путем применения водяного фильтра.

Однако даже при соблюдении всех изложенных выше предосторожностей только небольшой процент наблюдений может дать удовлетворительные результаты, так как земная атмосфера, как правило, не остается в течение дня в неизменяемом состоянии. Причина этого заключается, как в изменении селективного поглощения, зависящего от водяных паров и т. п., так и в изменении рассеивающей способности атмосферы. Последнее зависит, повидимому, главным образом от нарушения однородности оптических свойств атмосферы, вследствие развития конвекционных течений. Применяя водяной фильтр и избавляясь от полос поглощения, мы получаем право считать, что изменение прозрачности атмосферы зависит только от изменения ее рассеивающей способности, от чего бы это ни зависело. В таком случае необходимый контроль может состоять только в контроле над рассеянием света воздухом, от чего зависит яркость небесного свода.

Как известно Аббот уже давно именно с этой целью ввел в употребление свой пиранометр, дающий в абсолютных единицах радиацию небесного свода в кольцевой зоне вокруг солнца. Однако, гораздо проще определять яркость неба вокруг солнца чисто относительным образом, именно по отношению к самому солнцу. При уменьшении прозрачности атмосферы яркость солнца уменьшается, но яркость небесного свода вокруг него соответственно увеличится.

Мною построен специальный визуальный фотометр, позволяющий легко и быстро производить подобные определения. Результаты наблюдений с этим прибором параллельно с актинометром Михельсона будут сообщены позднее. В заключение отмечу, что как следует из предыдущего, вполне возможно делать вполне обоснованным образом регулярные определения солнечной постоянной, при помощи сравнительно простой аппаратуры, доступной любой актинометрической станции. Для возможности быстрого применения изложенного выше способа было бы нетрудно вычислить вспомогательные таблицы.

Декабрь, 1930 г.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

МЕХАНИЗМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НИТРАТОВ

М. П. КОРСАКОВОЙ

(*Представлено академиком* С. П. Костычевым)

ЧАСТЬ IV[1]

Своеобразный случай восстановления нитратов

Как мною было установлено, способность бактерий восстановлять нитраты не ограничивается известными до сих пор случаями, но может проходить и другими путями. Исследования над выделенной мною бактерией показали, что конечным продуктом восстановления являются не нитраты, не окислы азота и не свободный азот, а соединение, природа которого точно не была установлена.

В настоящей статье я привожу данные, касающиеся другой бактерии *B. turanicum*, выделенной Г. К. Бургвицем,[2] при исследовании свойств которой, начатом мною совместно с В. Н. Былинкиной[3] по другому поводу, выяснилось, что она по своим биохимическим особенностям чрезвычайно близка к бактерии, о которой говорилось в предыдущей статье.

Обе бактерии в начале хорошо развивались на растворах, содержавших исключительно минеральный азот. Постепенно, однако, это свойство было ими утрачено, так что пришлось перейти к средам, содержащим органический азот; в качестве питательного раствора была применена дрожжевая вода, которая оказалась прекрасной средой для развития бактерий; в качестве источника углерода применялась исключительно глюкоза.

[1] См. ч. I в ИОФМ, 1929, № 5, стр. 505; ч. II там же, № 6, стр. 599; ч. III — в ДАН-А, 1930, № 27, стр. 745.

[2] Работа Г. К. Бургвица печатается.

[3] Работа М. П. Корсаковой и В. Н. Былинкиной печатается.

Введенные в среду 0.1% нитраты, как и в описанном мною раньше случае, быстро восстановлялись без выделения газа; нитриты появлялись в начале опыта, к концу его совершенно исчезали. В дальнейшем, были сделаны попытки повысить в опытах содержание нитратов до 0.2%, 0.4% и, наконец, до 0.8%: во всех растворах восстановление доходило до конца. В соответствии с установленными мною раньше фактами, восстановление нитратов может происходить при потреблении очень незначительных количеств глюкозы. Оказалось, что и в данном случае бактерия способна восстановлять нацело не только 0.1%, но даже 0.8% растворы нитратов в 1% растворе глюкозы.

Привожу здесь результаты некоторых опытов, которые могут дать представление о ходе процесса восстановления при различных концентрациях глюкозы.

Таблица 1

Продолжительность опыта	Контроль			Опыт		
	KNO_3 %	KNO_2 %	Глюкоза	KNO_3	KNO_2	Газ
6 дней	0.2	0	0.25	сл.	0	0
4 дня	0.2	0	0.5	0	0	0
5 дней	0.4	0	0.5	0	0	0
5 дней	0.8	0	1.0	0	0	0

Следует отметить, что с течением времени количество нитритов в опытах стало увеличиваться, и опыты, которые со свежей культурой выходили с необыкновенной отчетливостью, стали протекать менее правильно. Под конец работы, часто в 0.8% растворе нитратов накоплялось много нитритов, развитие бактерий останавливалось и восстановление до конца не доходило.

Опыты с 0.4% раствором неизменно приводили к положительному результату: во всех опытах восстановление нитратов доходило до конца, так что в конце опыта в растворе нельзя было обнаружить ни нитратов, ни нитритов, выделения же газообразного азота совсем не наблюдалось.

Для характеристики процесса восстановления нитратов необходимо было выяснить две стороны вопроса: 1) ход восстановления нитратов и природу конечного продукта и 2) характер восстановления, как окислительно-восстановительного процесса.

Ход восстановления нитратов *B. turanicum* и природа конечного продукта восстановления

С теоретической точки зрения, конечными продуктами восстановления нитратов могут быть следующие соединения: нитриты, окись азота, $H_2N_2O_3$, закись азота, азотноватистая кислота или нитроксил, свободный азот, азотисто-водородная кислота, гидроксиламин и аммиак.

Исследования, касающиеся природы конечного продукта, были выполнены почти исключительно в следующей среде: вдвое разбавленная дрожжевая вода, 1% — глюкоза и 0.8% — нитраты. Опыты ставились в стерильных условиях, колба замыкалась каучуковой пробкой с отводной трубкой, конец которой был опущен под эвдиометр в ртуть.

Для того чтобы подойти к выяснению вопроса, какое вещество получается в опытах в качестве конечного продукта, пришлось остановиться на всех теоретически возможных продуктах восстановления нитратов.

Нитриты образуются в ходе опыта, но затем постепенно исчезают; таким образом и здесь, как и в процессе денитрификации, они являются промежуточными продуктами при восстановлении нитратов; например, в опыте на дрожжевой воде с 0.5% глюкозой и 0.4% нитратом, где восстановление шло довольно медленно, на третьи сутки было найдено незначительное количество нитратов и сравнительно много нитритов, на четвертые сутки нитраты исчезли, нитриты же оставались в виде следов, наконец, на пятые сутки не оставалось и следов ни нитратов, ни нитритов.

Окись азота мало растворима в воде; при температуре опыта в 25° 100 см раствора могло бы растворить не более 7 мг окиси азота. Из 800 мг нитратов, должно было образоваться 240 мг или 179 куб. см окиси азота, которая должна была бы почти целиком выделиться из раствора. Отсутствие выделения газа служит доказательством того, что окись азота в опыте не образуется.

Также легко получаются отрицательные ответы и в отношении свободного азота, гидроксиламина и аммиака. Свободный азот не выделяется, гидроксиламин в конце опыта не обнаруживается даже качественными реакциями, а аммиак, если и образуется, то в совершенно ничтожных количествах, как показали его многократные определения.

Таким образом, наиболее вероятными продуктами восстановления приходится признать закись азота или ее производные — азотноватистую кислоту и нитроксил.

Закись азота сильно растворима в воде. При температуре опыта в 25° в 100 см могло бы раствориться около 100 мг закиси азота. При восстановлении 800 мг нитратов до закиси азота образовалось бы 176 мг последней, и около 76 мг или 38 см должно было выделиться из раствора.

Полное отсутствие выделения газа в эвдиометре, заставляет притти к заключению, что в данном случае восстановление нитратов не может итти нацело до закиси азота.

Возможно, однако, представить себе, что процесс идет только частично до закиси азота, так что последняя может не выделяться из раствора. Для выяснения того, не находятся ли в растворе некоторые количества закиси азота, были поставлены специальные опыты с вдвое разбавленной дрожжевой водой, содержащей 1.0% глюкозы и 0.8% нитратов.

В опытную колбу, после заражения культурой, вносился стерильный парафин, который изолировал раствор от воздуха; колба стерильно замыкалась пробкой с отводной трубкой, погруженной в ртуть под эвдиометр.

По окончании опыта, втечение которого не наблюдалось выделения газа, производилась поверка на отсутствие в растворе нитратов и нитритов; колба доверху наполнялась парафином и соединялась со специально сконструированным прибором. Последний был устроен таким образом, что наполнялся целиком парафином, а газ, выделявшийся из раствора при кипячении, собирался в калибрированной пипетке над парафином и затем мог быть переведен в ртутную пипетку. При помощи этого прибора был выполнен ряд определений количества газа, растворенного в жидкости по окончании опыта.

Раствор имел щелочную реакцию; количество выделившегося при кипячении в нескольких параллельных опытах газа равнялось приблизительно 2 см, что соответствует количеству воздуха, который мог быть растворен в 100 см раствора. Таким образом, приходится притти к заключению, что закись азота в опыте совершенно не образуется.

В качестве конечного продукта восстановления нитратов культурой могла образоваться азотноватистая кислота. В водном растворе соли этой кислоты достаточно прочны и могли сохраниться до конца опыта.

Методом Киршнера, в который были введены небольшие изменения, были получены серебряные соли азотноватистой кислоты и реакции

на азотноватистую кислоту проводились параллельно, как с одним опытным раствором, так и с тем же раствором, к которому были прибавлены натровые соли азотноватистой кислоты. Были произведены следующие качественные реакции:

1) Получение серебряных солей. Растворимые соли азотноватистой кислоты дают при воздействии азотно-кислого серебра характерные серебряные соли ярко желтого цвета, почти совершенно не растворимые в воде; осаждение их рекомендуется делать из разбавленных растворов. Азотноватисто-кислое серебро растворяется в очень слабых кислотах и из полученных растворов вновь осаждается при осторожном прибавлении слабого аммиака. При осаждении азотно-кислым серебром опытного раствора, в который первоначально было внесено 0.8% нитратов, и в котором к концу опыта не было ни нитратов, ни нитритов, выпадал обильный осадок угле-кислого серебра, окрашенный в желтоватый, бледный цвет, который уже по виду не имел ничего общего с осадком азотноватистокислых солей. После растворения осадка в слабых кислотах и осторожного прибавления к отфильтрованному раствору аммиака,—выпадения характерного желтого осадка не наблюдалось. При введении в раствор азотноватистокислых солей, реакция с серебряными солями давала положительный результат. Осаждение серебряных солей азотноватистой кислоты рекомендуется вести в разбавленных растворах. Ввиду того, в 100 куб см опытного раствора при восстановлении 800 мг нитратов в азотноватисто-кислый калий, должно было получиться 544 мг последнего, была сделана попытка осаждения серебряных солей азотноватистой кислоты после разбавления раствора в пять и десять раз; результат получился в той же мере отрицательный, как и с неразбавленным раствором.

2) Азотноватисто-кислые соли начинают, после окисления перманганатом в присутствии серной кислоты, давать синее окрашивание с дифениламином. Эта реакция для опытного раствора дала тоже отрицательные результаты.

3) Азотноватистая кислота при кипячении в растворе разлагается с выделением закиси азота. Такое разложение может происходить даже в слабо щелочной среде.

Опыт был поставлен на дрожжевой воде с 1.0% глюкозы и 0.8% нитратов.

По исчезновении из раствора нитратов и нитритов, раствор был разделен на 2 порции по 100 см в каждой. Одна порция подвергалась кипя-

чению в упомянутом выше приборе с сохранением слабо щелочной реакции раствора, другая была подкислена серной кислотой. Из первой порции выделилось 2 см газа, анализ которого был произведен в приборе Половцева: анализ показал, что состав газа отвечает составу воздуха.

Из подкисленного раствора выделилось значительное количество газа. Газ переведен был в ртутную пипетку, измерен и переведен в эвдиометр, в котором была поглощена углекислота. После поглощения углекислоты осталось 4.2 см газа; около двух сантиметров газа должно быть отнесено за счет находившегося в растворе воздуха. Анализ 4.2 см газа, оставшегося после поглощения углекислоты, показал, что в нем содержится значительный процент газа взрываемого с водородом. В двух параллельных порциях получены следующие результаты:

1) Газ взрываемый с водородом : 60%
2) » » » 61%

Если мы признаем, что даже весь взрываемый газ представляет из себя закись азота, то все же ее количество будет ничтожно, и не превышает 2—3 см вместо тех 88 см, которые должны были образоваться, если бы в результате восстановления нитратов образовалась азотноватистая кислота.

Кроме качественных реакций на азотноватистую кислоту были выполнены и определения азота в осадке методами сожжения, так как сожжение азота по Дюма является количественным методом определения азотноватисто-серебряных солей.

Полученное методом Киршнера азотноватисто-кислое серебро было два раза переосаждено при помощи аммиака и сожжено по Дюма.

Таблица 2

	Навеска $Ag_2N_2O_2$	Азот в мг	Азот в %
Вычислено	0.2050	20.8	10.14
Найдено	0.2056	20.9	10.16

При сжигании серебряных солей, полученных осаждением опытного раствора, азота азотноватистой кислоты обнаружено не было.

Сжигание осадка серебряных солей по Дюма было выполнено с опытными порциями с 0.8% нитрата, в которых по окончании опыта не было обнаружено ни нитратов, ни нитритов и в которых реакция протекала, как и всегда, без выделения газа. 100 куб. см опытной порции было осаждено азотнокислым серебром, осадок начисто отмыт от азотной кислоты, высушен в вакуум-эксикаторе и сожжен по Дюма. При сжигании найдено 20.9 мг азота.

К 100 куб. см опытного раствора, до осаждения его серебряными солями, прибавлен раствор азотноватисто-кислого калия, содержавший около 6 мг азота. Затем произведено осаждение серебряными солями, высушивание и сжигание осадка по Дюма. Найдено азота 26.4 мг. В опыт введено было 130.7 мг азота: 18.7 мг в дрожжевой воде и 112 мг в виде нитратов. Количественное определение азота в серебряных солях показало, что к концу опыта раствор не содержит серебряных солей азотноватистой кислоты. Если азотноватистая кислота и образовалась втечение опыта, как это можно предположить, то по мере хода опыта она, очевидно, подвергалась разложению, и переходила в какое-то легко улетучивающееся соединение.

Приводимые в таблицах 3 и 4 определения азота по окончании опытов показали, что при восстановлении нитратов получается какое-то летучее соединение, так как оно не учитывается не только по Кьельдалю и Иодельбауэру, но и по Дюма. Очевидно при выпаривании раствора, предшествующем сжиганию по Дюма, это соединение улетучивается.

Таблица 3

В конце опыта: $HNO_3 = 0$; $HNO_2 = 0$
Состав среды: $(NH_4)H_2PO_4$ 0.2%, K_2HPO_4 0.2%, KNO_3 0.2%; глюкоза 0.5%

	Азот в мг в 100 куб. см раствора		
	Аммиака	Сожжено по Иодельбауэру, после отгонки аммиака	Сумма
Контроль	59.6	27.6	87.2
Опыт	5 0	5.4	60.4

— 26.6

Таблица 4

В опыте $HNO_3 = 0$; $HNO_2 = 0$								
Состав среды			Азот контроля в мг			Азот опыта в мг при сжигании		
Дрожж. вода	Глюкоза	KNO_3	Дрожж. вода	Нитратов	Сумма	По Кьельдалю	По Дюма	Азот NH_3
В 4 раза разбавл. . . .	0.5%	0.2%	6.2	28.1	34.3	8.0	12.0	2.0
В 2 раза разбавл. . . .	0.5	0.4	12.4	56.2	68.6	15.5	17.1	2.3
В 2 раза не разбавл. .	0.5	0.2	12.0	27.8	39.8	15.1	16.4	2.1
Не разбавлен	0.5	0.2	23.0	27.7	50.7	23.2	21.9	2.2

Опыты по определению азота, приведенные в 3 таблице показывают, что в конце опыта ускользает от учета 26.8 мг азота, немного меньше того количества, которое было внесено в виде нитратов. Втечение опыта азот аммиака уменьшился на 4.6 мг. Этот аммиак, повидимому, был усвоен бактерией и в конце опыта был обнаружен при сжигании по Иодельбауэру. Частично, однако, в такую поддающуюся сжиганию форму перешел и азот нитратов, так как количество сжигаемого по Иодельбауэру азота превышает на 0.8 мг количество, на которое уменьшился азот аммиака втечение опыта. Таким образом, из 27.6 мг азота нитратов, 0.8 мг должно было быть усвоено, а 26.8 мг должно было перейти в восстановленное соединение. Интересно отметить, что в полном соответствии с этим как раз 26.6 мг азота перешло в форму, ускользающую от сжигания.

В таблице приведены опыты сжигания опытных порций по Кьельдалю и Дюма. Одна из трех параллельных порций сжигалась по Кьельдалю, вторая по Дюма; в третьей производилось определение аммиака. По Кьельдалю сжигался целиком весь опытный раствор. При сжигании по Дюма опытный раствор выпаривался с кварцевым песком при нейтральной реакции и температуре 37° в сушильном аппарате; полученный остаток сжигался. Как видно из данных 4-й таблицы, уловить при этом соединение, полученное в результате восстановления нитратов—не удалось. К таким же отрицательным результатам привели и два, несколько измененных способа сушки для сжигания по Дюма, именно: 1) отгонка воды в вакууме из щелочной среды и сжигание остатка, 2) прибавление к раствору перед выпариванием в сушильном аппарате углекислого кальция или молочнокислого серебра.

Полученные данные показывают, что сохранить продукты восстановления нитратов в остатке после выпаривания воды не удается; если бы они сохранились в той или иной форме, то были бы обнаружены при сжигании по Дюма.

Из всех перечисленных в начале статьи соединений, возможными продуктами восстановления должны быть признаны путем исключения: азотноватистая кислота, нитроксил, и переходное соединение типа $H_2N_2O_3$.

По литературным данным, соли азотноватистой кислоты в растворах стойки. Однако возможно допустить, что это свойство может подвергнуться изменению в зависимости от свойств питательной среды и присутствия бактерий. Произведенные мною опыты показали, что и в чистых водных растворах азотноватисто-кислый калий легко меняет свои свойства: его водный раствор через 24 часа перестает давать характерные, ярко желтые соли серебра, а начинает, при прибавлении азотнокислого серебра, давать белый осадок; реакция с дифениламином при окислении пермангантом в кислой среде тоже перестает получаться. Следует отметить, что при этом способность разлагаться с образованием закиси азота, сохраняется, так как при кипячении раствора, закись азота выделяется.

Во всяком случае несомненно, что если азотноватистая кислота в опыте образуется, а затем постепенно разлагается — разложение это идет не обычным путем с образованием закиси азота, так как обнаружить последнюю в растворе не удалось.

Нитроксил и переходное соединение типа $N_2H_2O_3$ мало изучены, а существование последнего даже не доказано.

Нитроксил представляется мне весьма возможным продуктом восстановления нитратов; он представляет из себя соединение нестойкое, которое в условиях опыта должно разлагаться с большой легкостью.

Во всяком случае, повидимому в результате восстановления нитратов или разложения полученного продукта, получается соединение не типа соли: весь калий, который заключался во внесенной азотно-калиевой соли, выделился к концу опыта в виде едкого кали, который связывает образованную бактерией углекислоту. В данном случае мы имеем дело с явлением совершенно аналогичным с тем, которое мы встречали при восстановлении нитратов, когда за счет калия нитратов образуется едкий кали.

В опытах с 0.8% нитратами образуется бактерией около 300 мг углекислоты. Если бы едкий кали не образовался, то углекислота, выделив-

шаяся за счет окисления глюкозы, оставалась бы свободной. Титрование показывает однако, что вся углекислота раствора связана главным образом в виде бикарбонатов, а в небольшой части в виде карбонатов.

При титровании 100 см опытного раствора (0.8% KNO_3 1.0% глюкозы в дрожжевой воде), в котором не могли быть обнаружены ни нитраты, ни нитриты, в двух параллельных опытах пошло на титрование суммы карбонатов и бикарбонатов 68 и 72 см 0.1 N соляной кислоты. Подсчет показывает, что весь калий, находившийся во внесенных нитратах, перешел в едкое кали и пошел на связывание углекислоты.

Характер восстановления, как окислительно-восстановительного процесса

Как мне раньше приходилось подчеркивать, всякий процесс восстановления нитратов бактериями, независимо от того конечного продукта, до которого он доходит, представляет из себя процесс окислительно-восстановительный. В этом процессе, активируемом бактериями, органическое вещество является донатором, а нитраты — акцептором водорода. При этом донатором может быть или внесенное в питательный раствор органическое вещество, или, в том случае когда бактерии способны к брожению, некоторые из продуктов брожения.

В тех случаях, которые мне пришлось исследовать, в окислительно-восстановительных процессах, связанных с восстановлением нитратов, органическое вещество окисляется обычно до углекислоты.

Таблица 5

Дрожжевая вода вдвое разбавлена; количество раствора 100 куб. см

KNO_3	Глюкоза в мг			CO_2 в мг
	Контроль	Опыт	Потреблено	В опыте
0	961	850	111	0
0.2%	428	273	155	76.8
0.4	428	224	204	153.7
0.8	961	651	310	304.0

B. turanicum слабо развивается и усваивает мало органического вещества в тех жидких питательных средах, которые мною применялись; среда состояла из вдвое разбавленной дрожжевой воды со внесением глю-

козы. В 1% растворе глюкозы, на 100 куб. см раствора усваивалось около 100 мг глюкозы, т. е. около 10%. При этом актуальная кислотность раствора слабо повышалась; выделения углекислоты при этом не происходило.

Слабое развитие бактерии обусловливается очевидно тем, что она не приспособлена к анаэробным условиям свойственным жидкой среде, и отличается слабой способностью к брожению. Присутствие нитратов изменяет картину: бактерия способна активировать систему глюкоза + нитраты; окислительно-восстановительный процесс, связанный с восстановлением последних, протекает гораздо более энергично чем процесс брожения глюкозы самой по себе. В присутствии нитратов бактерии используют гораздо более значительные количества глюкозы, а в связи с этим и развитие ее значительно усиливается. Ввиду того, что в отсутствии нитратов углекислота совершенно не выделяется, мы имеем право сказать, что вся выделяющаяся в их присутствии углекислота образуется в окислительно-восстановительном процессе, связанном с их восстановлением. Это делается особенно ясным после рассмотрения тех количеств углекислоты, которые выделяются в присутствии различных количеств нитратов. Количество образовавшейся углекислоты с необычайной правильностью повышается в связи с увеличением количества нитратов в растворе: между количеством восстановленных нитратов и количеством выделенной углекислоты наблюдается полная пропорциональность.

Таблица 6

Глюкоза %	KNO_3 %	Глюкоза в мг			CO_2 в мг в опыте
		Контроль	Опыт	Потреблено	
	0.4	437.5	248	189.5	143.0
	0.8	875.0	579.0	296.0	300.0

Количество потребленной глюкозы стоит в зависимости от количества внесенных и восстановленных нитратов. Во всех приводимых опытах восстановление нитратов доходило до конца. Брожение в отсутствии нитратов настолько слабо, что даже учет продуктов брожения представляет затруднение. Способность бактерии активировать глюкозу таким образом, чтобы она делалась одновременно и акцептором и донатором водорода — ничтожна.

В тоже время активация системы, в которой глюкоза является донатором, а нитраты—акцептором водорода, происходит крайне энергично: восстановление нитратов происходит нацело, а глюкоза окисляется до углекислоты. В тех опытах, где глюкоза в отношении нитратов находится в избытке, количество углекислоты стоит в зависимости от количества нитратов в исходном растворе. Бо́льшая часть потребленной глюкозы идет на образование углекислоты. Так, в опыте первом таблицы 6 из всей потребленной глюкозы 97 мг окислено до углекислоты, а за счет 92.5 мг образовались другие соединения. В опыте втором той же таблицы 204 мг глюкозы окислено до углекислоты; на образование других продуктов пошло 92 мг. Количество образующихся при этом летучих кислот очень невелико, как показывает опыт, поставленный с учетом летучих кислот. Опыт был поставлен на вдвое разбавленной дрожжевой воде, 1.0% глюкозы и 0.8% KNO_3.

Таблица 7

Глюкоза в мг			CO_2 в мг	Летучие кислоты в см 0.1 н КНО
Контроль	Опыт	Потреблено		
962.6	674.6	288.0	332	3.9

Из 288 мг глюкозы, потребленной в опыте, 226 мг окислилось до углекислоты, а 62 мг пошло на образование других соединений, к числу которых принадлежат и небольшие количества летучих кислот.

Как уже подчеркивалось выше, вся углекислота опыта выделяется в результате окислительно-восстановительного процесса, который протекает в системе глюкоза-нитраты. Система эта может быть изображена следующей формулой, в которой X представляет из себя продукт восстановления нитратов.

$$C_6H_{12}O_6 + nKNO_3 \rightarrow 6\,CO_2 + nX.$$

Зная в этой системе три члена — возможно определить четвертый, именно nX. Величина n может быть вычислена на основании полученных цифровых данных соотношения между количеством восстановленного нитрата и образовавшейся углекислоты.

Данные вышеприведенных таблиц показывают приблизительно следующие соотношения: на 800 мг восстановленных нитратов образуется 300 мг,

304 мг и 332 мг углекислоты, т. е. в среднем 312 мг. Таким образом на одну молекулу восстановленных нитратов в опыте образовалось около 0.9 молекулы углекислоты. Этот факт делает вероятным предположение, что окислительно-восстановительный процесс в системе глюкоза-нитраты идет в данном случае по форме:

$$C_6H_{12}O_6 + 6\ KNO_3 = 6\ CO_2 + 6\ KNO + 6\ H_2O$$

По этой форме на одну молекулу нитратов должна была бы образоваться одна молекула углекислоты: фактически же мы получаем 0.9, число близко подходящее к приведенной формуле, согласно которой конечным продуктом восстановления может быть или азотноватистая кислота или нитроксил. Это делается особенно вероятным, если сопоставить друг с другом формулы, по которым должно итти восстановление нитратов до соединений азота в различной мере окисленных.

$$1)\ 2\ C_6H_{12}O_6 + 24\ KNO_3 = 24\ KNO_2 + 12\ CO_2 + 12\ H_2O.$$

$$2)\ 3\ C_6H_{12}O_6 + 24\ KNO_3 = 24\ NO + 12\ KHCO_3 + 6\ K_2CO_3 + 12\ H_2O$$

По этой же форме пойдет восстановление, если конечным продуктом будет $N_2H_2O_3$.

$$3)\ 4\ C_6H_{12}O_6 + 24\ KNO_3 = 12\ N_2O + 24\ KHCO_3 + 12\ H_2O.$$

По той же формуле пойдет восстановление, если конечным продуктом будет $N_2K_2O_2$ или NHO.

$$4)\ 5\ C_6H_{12}O_6 + 24\ KNO_3 = 12\ N_2 + 24\ KHCO_3 + 6\ CO_2 + 18\ H_2O.$$

Таким образом получается, что при восстановлении нитратов до менее окисленных продуктов выделяется больше углекислоты и потребляется больше глюкозы, чем при восстановлении до продуктов сильнее окисленных.

При восстановлении 24 молекул KNO_3 до KNO_2 выделяется 12 молекул CO_2 и потребляется 2 молекулы глюкозы.

При восстановлении 24 молекул KNO_3 до NO выделяется 18 молекул CO_2 и потребляется 3 молекулы глюкозы.

При восстановлении 24 молекул KNO_3 до $H_2N_2O_2$ выделяется 24 молекулы CO_2 и потребляется 4 молекулы глюкозы.

При восстановлении 24 молекул KNO_3 до N_2 выделяется 30 молекул CO_2 и потребляется 5 молекул глюкозы.

В приведенных опытах на 24 молекулы восстановленных нитратов выделяется 21.6 молекул CO_2, что ближе всего подходит к четвертой формуле. Точного совпадения мы ожидать не можем, ввиду, с одной стороны, неизбежных погрешностей определений, с другой, того, что исследуемая бактерия, хотя и в слабой степени, но способна к брожению, а окисляться за счет нитратов может не только глюкоза, но и ее продукты брожения.

Соотношение между $\frac{KNO_3}{CO_2}$ лежит между соотношениями, требуемыми формулой второй и третьей, так что продуктом восстановления нитратов является ввиду доказанного отсутствия NO только HNO, или $H_2N_2O_2$. Не может быть также исключена и возможность того, что конечным продуктом является какое-то, до сих пор не исследованное соединение.

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

Исследованная бактерия характеризуется слабо выраженной способностью к брожению; в то же время она способна весьма энергично активировать систему: органическое вещество-нитраты к окислительно-восстановительному процессу.

В происходящем при этом окислительно-восстановительном процессе восстановление нитратов происходит совершенно своеобразным путем и по всей видимости доходит или до азотноватистой кислоты или нитроксила, или до какого-то, до настоящего времени не исследованного ближе, соединения.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ПУТИ К ИЗМЕНЕНИЮ ФИЗИОЛОГИЧЕСКОГО ИММУНИТЕТА

(Из работ Лаборатории физиологии растений Института засухи)

А. А. РИХТЕРА и К. Т. СУХОРУКОВА

(*Представлено академиком* **В. Л. Комаровым**)

Работами Сухорукова[1] установлена связь между высотой динамики окислительного аппарата растения и его биологической стойкостью по отношению к паразитам. Низкие показатели динамики пероксидазы коррелируют с высокой степенью иммунитета и наоборот. Таким образом, теория физиологического иммунитета Комеса[2] об обратной связи между активностью оксидаз и степенью иммунитета нашла себе новое подтверждение. Однако, проверка утверждения Комеса об обратном соотношении между активностью оксидаз и кислотностью клеточного сока,—утверждения, подробно уже разобранного Н. И. Вавиловым[3] на громадном селекционном материале, привела к отрицательным результатам (Сухоруков, l. с., стр. 255). Показатели кислотности клеточного сока растения не являются, таким образом, сами по себе определяющими степень иммунитета. Одновременно выяснилось (Сухоруков, l. с., стр. 259), что кислотность почвы отражается не только на способности семян заразихи к прорастанию (Рихтер),[4] но и на высоте динамики пероксидазного аппарата корневой системы иммунных и неиммунных подсолнечников. Резкое различие в активности пероксидаз, обусловливающее различие в иммунности корневых систем к заражению заразихой,

[1] К. Сухоруков. Энзиматическая активность растительного организма и некоторые явления физиологического иммунитета. Журн. оп. агр. Ю. В., 1930, т. VII, вып. II, стр. 237—266.

[2] O. Comes. La profilassi nella patologia vegetale. Napoli, 1916.

[3] Н. Вавилов. Иммунитет растений к инфекционным заболеваниям. М. 1919.

[4] А. Рихтер. К физиологии заразихи, поражающей подсолнечник (*Orobanche cumana* Wallr.). Уч. Зап. Сарат. гос. унив., 1924, вып. II.

совпадает с нейтральной или слабо щелочной реакцией почвы, т. е. с теми величинами pH, при которых проявление иммунных свойств селекционных подсолнечников особенно рельефно. В поисках способов изменения степени активности внутриклеточного энзиматического аппарата, мы остановились на данных Стоклаза,[1] показавшего, что внесение солей иода в почвенный субстрат резко отражалось на динамике окислительных ферментов сахарной свеклы, значительно повышая их активность. Исходя из предположения возможности переноса такого воздействия иодного иона и на другие растения, мы применили методику Стоклаза к подсолнечнику.

Влияние KJ на прорастание и активность пероксидаз в проростках подсолнечника.

Семянки селекционного иммунного к заразихе сорта № 169 (Сар. обл. с.-х. оп. ст.) освобождены от кожуры и помещены в чашках Петри на фильтровальной бумаге, смоченной 5% раствором KJ; контроль на дестиллированной воде. Растворы меняются раз в сутки. Температура термостата 25° С. Испытание на активность пероксидаз методом Вильштеттера и Шталля,[2] дало следующие результаты.

Относительные активности пероксидаз в семенах и проростках подсолнечника в связи с воздействием иодистого кали:

Продолжительность проращивания в часах	Воздействие J	Контроль (без J)
0 (семена)	—	100%
25	205% (137)	150% (100)
40	281% (240)	117% (100)
65	376% (183)	205% (100)

Проростки на растворе с KJ были значительно более развиты, сравнительно с контролем.

Данные опыта с ясностью указывают на резкое повышение активности пероксидаз у проростков подсолнечника, прорастающих под воздействием растворов иодной соли.

Попутно с определением пероксидаз были поставлены пробы на присутствие глютатиона.

Провести количественное определение этого, по мнению Гопкинса (Hopkins. Journ. of biol. Chem., 1922, 54, 527), основного катализатора

[1] I. Stoklasa. Bioch. Ztschr., 1929, Bd. I. H. 1—3, S. 211.

[2] P. Rona. Praktikum der physiologischen Chemie. 1926, I Teil.

процессов клеточного дыхания, в виду малой применимости существующих методов к нашему объекту, не удалось; мы остановились на качественном методе Arnold'а нитропруссидной пробой (описание метода взято из работы H. Iaos, & Waro Nakonara: The glutation contents of malignant tumors, Proc. of Imp. Acad., Tokyo, 1926, VII, № 8).

Метод этот разработан для тканей животного происхождения, но не требует почти никаких изменений для применения к растительным объектам.

Определение производилось следующим порядком: 1 г материала, вернее количество проростков, соответствующее 1 г исходного семенного материала, измельчалось в ступке с 10 куб. см насыщенного раствора сернокислого аммония, подкисленного серной кислотой; полученная масса отцентрифугировалась и жидкая часть профильтровывалась через бумажный фильтр.

К 5 куб. см фильтрата прибавлялось 0.2 куб. см 5% раствора нитропруссида и интенсивность окрашивания устанавливалась в момент приливания аммиака (0.5 куб. см в 10% крепости).

Определения производились параллельные и все время сравнительно с контролем (водой).

Наличие глютатиона в семенах и проростках подсолнечника, в связи с воздействием иодистого калия:

Продолжительность проращивания в часах	Воздействие J	Контроль (вода)
0 (семена)	нет реакции	нет реакции
25	очень сильная	слабая
40	сильная	явственная
65	сильная	явственная

На первых стадиях прорастания (25 часов) намечается гораздо более резкое выявление реакции на глютатион у иодных проростков, чем у контрольных; в дальнейшем различие значительно сглаживается.

Качественный характер реакции на глютатион не позволил перейти к количественному сопоставлению этой реакции с активностью пероксидаз. Отметим лишь общую для обеих реакций тенденцию относительно повышения на иодных растворах. Результаты предварительных опытов с влиянием раствора иодистого калия на активность окислительных процессов в проростках подсолнечника подводили, по нашему мнению, достаточную базу для дальнейших вегетационных опытов по выяснению воздействия солей иода на динамику поражаемости подсолнечника заразихой.

Опыты были поставлены следующим порядком:

Глиняные горшки («цветочные банки»), емкостью в 4 л, наполнялись смесью южного чернозема и песка, в отношении 1 : 1 по объему. Применение столь сильно разбавленной песком почвы было вызвано желанием иметь, с одной стороны, достаточно богатый и питательный субстрат, а, с другой, обеспечить возможность легкого и хорошего дренажа, столь важного при введении растворов иодистого калия и последующих промывках почвенного субстрата.

В почву вносился богатый избыток семян заразихи А (саратовской).

Посев подсолнечника произведен 24 VII, а 30 VIII корневые системы отмыты от почвы для учета.

В каждый горшок закладывалось по 3 семянки различных селекционных сортов, как с повышенным иммунитетом к заразихе А, так и неиммунных.

За представление необходимого селекционного материала приносим глубокую благодарность ученому специалисту Лаборатории селекции Института засухи Е. М. Плачек.

Часть горшков получила при поливке только воду (водопроводную), другая поливалась раствором KJ (5%) в водопроводной воде.

Результаты вегетационных опытов были вполне отчетливы и характерны.

Растения на почве, обогащенной иодом, резко отличались от контрольных по своему внешнему виду—листья обладали более интенсивным зеленым цветом, междоузлия были укорочены, общее число листьев увеличено; на ряду с этим не исключены были и случаи отмирания отдельных экземпляров подсолнечника. Подсчет листьев к моменту уборки дал следующие цифры:

Подсолнечник	KJ	Вода
169	16, 12, 12 || ср. 13·3	10, 10, 8 || ср. 9·3
1012	12, 12, 16 || ср. 13·3	8, 8, 10 || ср. 8·7
1018	10, 10 || ср. 10	8, 8 || ср. 8
1015	10, 12 || ср. 11	10, 8 || ср. 9
1010	10, 10 || ср. 10	10, 10 || ср. 10
1019	12, 12 || ср. 12	12, 12 || ср. 12

Два последние сорта, не давшие увеличения числа листьев под воздействием KJ, по остальным внешним признакам резко отличались от контрольных.

Было интересно проследить, в рамках опыта, влияние иодистых солей на активность пероксидаз в корневых системах подсолнечника. В виду того, что заражение корней подсолнечника заразихой отзывается понижением активности пероксидаз (Сухоруков, l. c., стр. 244), наряду с указанными выше культурами, в зараженной почве были поставлены параллельные опыты с двумя расами подсолнечника (№ 169 иммунным и «грызовым» неиммунным) с исключением фактора заражения. Пробы для анализа взяты на различных фазах развития от возможно одинаковых по внешним признакам экземпляров. Определение пероксидаз по Вильштеттеру и Штоллю; навески корней—1 г.

Активность пероксидазы в корневых системах подсолнечника, выросших в растворах с солями иода и без них (в относительных числах пурпурогаллина).

Стадия	Подсолнечники № 169 (иммунный) J	№ 169 (иммунный) Контроль	«Грызовой» (неиммунный) J	«Грызовой» (неиммунный) Контроль
2-х пар листьев	1.351	1.000	1.401	1.312
4-х » »	1.285	1.000	1.367	1.320
6-х » »	1.312	1.000	1.413	1.400
8-х » »	1.218	1.000	1.313	1.300

Приводимые цифры сравнимы только в горизонтальном направлении.

Полученные цифры ярко и согласно указывают на сдвиг пероксидазной активности в сторону ее повышения под влиянием введенных в почву иодистых солей. Повышение активности особенно резко у иммунного сорта (до 35%), но в ослабленном виде намечается и у неиммунного подсолнечника.

Попутно с определением пероксидазы проведены были и качественные реакции на глютатион, давшие слабо положительные указания без возможности установить сколько-нибудь заметные различия.

Для установления степени поражаемости был произведен подсчет начавших развиваться на корнях подсолнечника заразих, дающих в начальных стадиях роста так называемые «вздутия», переходящие затем в формирование стеблевой части цветоноса паразита, дающие «рост».

Корни были отмыты под струей воды 30 VIII, в срок отвечавший стадии образования корзинки; корневые поражения были выявлены с вполне

достаточной явственностью. Просмотр корневых систем и подсчет поражений проведен под лупой при увеличении в 10 раз.

Поражаемость корневых систем ряда рас подсолнечников заразихой А (Саратовской) в зависимости от воздействия солей иода.

Подсолнечники	Количество и характер поражения	
	J	Контроль
№ 169 (иммунный)	1) 3 заразихи в росте, 2 в начале роста	1) поражений нет
	2) 1 заразиха в росте,	2) 3 утолщения, похожие на вздутия
	3) несколько заразих в начале роста; растение гибнет	
№ 1012[1]	1) 5 заразих в росте 1 заразиха в начале роста	1) поражений нет
	2) 5 заразих в росте	2) поражений нет
	3) 2 заразихи в росте, 3 вздутия	
№ 1015[1]	1) 3 заразихи в начале роста	1) 2 вздутия
	2) 4 вздутия	2) 1 замершее вздутие
№ 1020[1]	1) много вздутий	1) 1 вздутие
	2) много вздутий, из них некоторые отмирают	2) 2—3 замерших вздутия
№ 1018[1]	1) много заразих в начале роста	1) 1 заразиха в росте
		2) 3 заразихи в росте
Грызовой (неиммунный)	1) 5 заразих в росте, 2 — в начале роста	1) 3 заразихи в росте
	2) 4 заразихи в росте	2) 6 заразих в начале роста
	3) 7 заразих в росте	

Приведенные подсчеты с полной отчетливостью говорят о том, что воздействие солей иода в почвенном растворе отражается значительным повышением поражаемости подсолнечника заразихой; ряд рас, в обычных почвенных условиях иммунных, теряют иммунитет под воздействием J и дают картину, не отличимую от обычных поражаемых сортов. Грызовой неиммунный сорт также повышает свою поражаемость заразихой под воздействием раствора иодистой соли.

[1] №№ по списку Лаборатории селекции Инст. засухи. К сожалению, никаких ближайших данных оценки иммунности любезно присланных образцов Лаборатория не дала.

Если сопоставить с полученными результатами приведенные выше данные повышения активности пероксидаз в корневых системах подсолнечника под влиянием того же фактора — воздействия J-иона, ясно будет характерное совпадение обеих динамик пероксидазной активности и иммунитета.

Одновременно с вегетационными опытами с заражением подсолнечника заразихой расы «А», были поставлены пробы и с другой расой «Б», или Донской, поражающей большинство селекционных иммунных сортов подсолнечника. Вполне естественно было предположение, что и здесь должны были бы выявиться, хотя и в несколько сглаженном виде, такие же соотношения, связанные с общей динамикой пероксидазных показателей.

Опытная постановка, как выше.

Поражаемость корневых систем ряда рас подсолнечников заразихой «Б» (Донской) в зависимости от воздействия солей иода.

Подсолнечники	Количество и характер поражения: J	Количество и характер поражения: Контроль
№ 1018[1]	1) много заразих (более 20) в росте 2) 6 заразих в росте	1) 3 заразихи в начале роста
№ 1011[1]	1) 15 заразих в росте	1) 1 заразиха в росте
№ 1015[1]	1) 8 заразих в росте 2) 12 заразих в росте	1) 5 заразих в росте 2) 2 заразихи в росте
№ 1012[1]	1) 10 заразих в росте	1) 5 заразих в росте 2) 4 заразихи в росте 3) 3 заразихи в начале роста
№ 1014[1]	1) 6 заразих в росте	1) 1 заразиха в росте, несколько вздутий
№ 1017[1]	1) 3 заразихи в росте	1) 4 заразихи в росте 2) 3 заразихи в росте 3) 4 заразихи в росте

Сдвиг иммунности под влиянием J-иона в сторону ее понижения ясно виден и в случае заражения заразихой «Б»: все опытные сорта, за исключением последнего, дали резкое выявление повышения поражаемости под влиянием введенного фактора и в соответствии с движением пероксидазного показателя.

---

[1] См. предыдущее примечание.

Сведем результаты работы:

1) Введение иодистых солей в почвенный раствор или воздействие их на прорастающие семена подсолнечника вызывает сдвиг пероксидазной активности в сторону ее повышения, особенно резкий у иммунных сортов и менее резкий, но вполне явственный — у неиммунных.

2) При этом, в полном согласии с положением Сухорукова о связи между высотою активности пероксидаз и поражаемостью подсолнечника заразихой «А» выявляется сдвиг иммунности в сторону ее понижения.

3) Таким образом намечается простой метод «стимулирования поражаемости» подсолнечника путем воздействия определенных солевых веществ; очевидно, должен быть возможным и обратный процесс «стимулирования иммунитета», изыскание факторов которого и явится объектом дальнейшего исследования.

4) Сдвиг иммунитета ясен при воздействии J-иона и при заражении рас подсолнечника заразихой «Б», поражающей вообще культурные сорта; ясны и здесь количественные соотношения поражаемости, очевидно, стоящие в прямой связи с динамикой пероксидазного аппарата и в пределах своих переходящие в качественные отличия.

5) Во всяком случае, иммунитет подсолнечника к заразихе не есть постоянный признак того или другого сорта, а является отражением количественной динамики внутренних процессов организма, находящейся в постоянной зависимости от воздействия среды и могущей быть направленной в ту или иную сторону.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931.
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О НОВОМ СТРЕКОЗОПОДОБНОМ НАСЕКОМОМ ИЗ ПЕРМСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ БАССЕЙНА Р. КАМЫ

Ю. М. ЗАЛЕССКОГО

(Представлено академиком **В. Л. Комаровым***)*

Летом 1929 г. во время экскурсии в бассейне р. Камы, в Тихих горах, моим отцом М. Д. Залесским и его спутниками была собрана небольшая коллекция остатков ископаемых насекомых. Эта коллекция была передана моим отцом в мое распоряжение для исследования, за что приношу ему мою глубокую благодарность. При ее первом же, беглом осмотре особенно заинтересовал меня ниже описываемый отпечаток, который вполне оправдал мои ожидания и является совершенно новым ископаемым представителем стрекозоподобных насекомых.

Он найден у с. Тихие Горы на р. Каме, в пермских отложениях, в конхиферовом горизонте казанского яруса.

Отряд **Permodonata** G. Zalessky

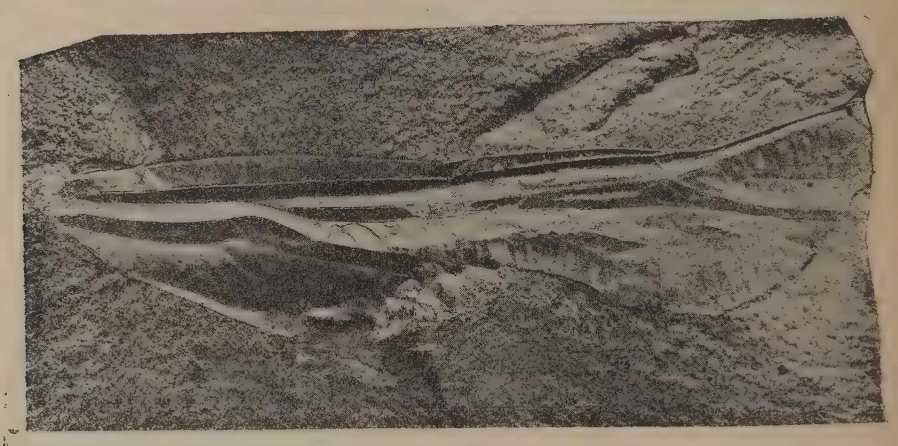
Сем. **Pholidoptilidae**

Pholidoptilon camense G. Zalessky n. g. et sp.

(Фиг. 1 и 2)

Не совсем полный, негативный отпечаток нижней поверхности переднего крыла левой стороны. Длина отпечатка 51 мм, ширина 12 мм. Крыло удлиненной формы, в основной части сильно гофрированное в продольном направлении. Внешний край крыла оборван, также отсутствует участок нижней части крыла. Кроме того крыло разорвано в продольном направлении до половины, и сохранившийся участок нижней части крыла сдвинут и лежит в другой плоскости, чем весь отпечаток, налегая отчасти на верхнюю часть крыла.

У самого основания крыла имеется закругленный прекостальный выступ, ограниченный совершенно особой жилкой, которая расширяясь и уплощаясь подходит к косте, но не доходя до последней теряется (см. фиг. 2 P). От этого прекостального выступа идет узкое, прекостальное поле, оканчивающееся не доходя до середины крыла.



Фиг. 1. *Pholidoptilon camense* G. Zalessky n. g. et sp. × 2,4.

Коста (C) и субкоста (Sc) пересекаются в конце второй трети крыла, так что субкоста идет по маргинальной линии и ограничивает край крыла, а коста спускается вниз и идет почти параллельно субкосте, причем вскоре обе жилки спаиваются вместе в общую, узкую пластинку испещренную поперечными штрихами (St). Немного не доходя до пересечения, субкоста дает сектор (Sec), идущий, пересекая радиус и первую медианную, к внешнему краю крыла.

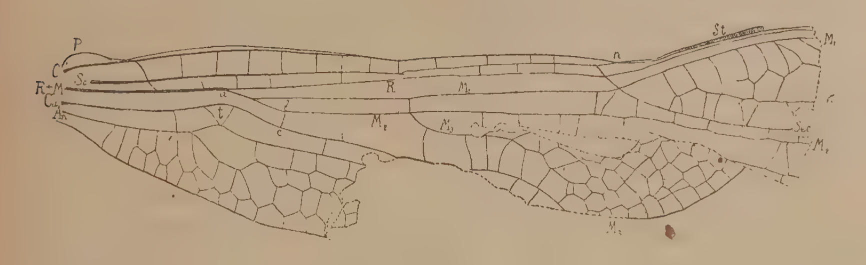
Следующая продольная жилка (R + M) представляется на отпечатке в виде довольно широкой выпуклости, ограниченной с двух сторон бороздами и лежащей в глубокой впадине отпечатка. Она является, повидимому, слитыми радиусом (R) и медианной (M). Эта общая жилка вскоре разделяется на составляющие ее радиус (R), идущий не давая ответвлений параллельно субкосте, и медианную (M), делящуюся вскоре на две ветви M_1 и M_2. Вторая ветвь медианной, немного не доходя до середины крыла, дает еще ветвь M_3.

Далее идет «нижняя» жилка, лежащая на вершине складки отпечатка, представляющая собою кубитальную жилку (Cu). Путь ее просле-

живается меньше чем до середины отпечатка, так как тут часть крыла не сохранилась.

Последняя и опять-таки из-за неполноты отпечатка скоро прерывающаяся жилка есть анальная (An), которая от себя дает тонкую веточку, идущую зигзагообразно среди неправильных ячеек. У разветвления своего анальная образует очень характерную большую ячею.

Костальное и субкостальное поля поделены рядом поперечных жилок на четырехугольные ячейки. В основной части крыла субкостальную жилку пересекает особая, более толстая, наискось направленная жилка, идущая от косты до радиуса и являющаяся как бы продолжением уплощенного конца



Фиг. 2. Жилкование переднего крыла *Pholidoptilon camense* G. Zalessky n. g. et sp.

прекостальной жилки, сильно напоминающая вместе с последней жилки в основной части крыла у *Ephemeroptera* (род *Palingenia*). Между радиальной и кубитальной жилками, так же как и между радиальной и первой медианной (M_1), нет совершенно поперечных жилок. Пространство между кубитальной и анальной жилкой перегорожено четырьмя поперечными жилками, причем две средние расположены под углом так, что образуют вместе с кубитальной характерный треугольник (t). Все остальные части крыла покрыты довольно густой сетью жилок, образующих неправильные многоугольные ячейки.

Вся поверхность мембраны, судя по отпечатку, была окрашена и лишь в дистальной части крыла, где имеются между ячейками светлые пятна, оно было вполне прозрачно. На основании этой пятнистости я и даю крылу родовое название *Pholidoptilon*.

Что касается систематического положения насекомого, которому принадлежало это крыло, то я его ставлю ближе всего к отряду *Odonata*, на основании следующих данных. Прежде всего, сходство представляет

типичная для стрекоз продольная складчатость или гофрировка крыла, такая, что если крыло разрезать вертикальной плоскостью поперек, то линия разреза будет зигзагообразна. Кроме того, отрезок субкосты (subcosta), от выше описанного пересечения ее с костой (costa) и до сектора косты (Sec), по моему можно гомологизировать с узелком (nodulus) современных стрекоз; сектор же самый можно рассматривать как узелковый сектор (sector nodalis), а пластинку, произошедшую путем слияния косты и субкосты, отождествить с птеростигмой (pterostigma, глазок, см. фиг. 2 St). Правда, последняя у современных стрекоз образуется путем хитинизации участка между радиусом и костой, но дело в том, что и радиус у *Pholidoptilon* подходит в этом месте очень близко. Очень возможно, что в процессе филогенетического развития образование птеростигмы и шло именно путем хитинизации участка мембраны в месте наибольшего сближения жилок, сначала в месте сближения косты с субкостой, а потом уже, когда слияние их стало окончательным, то в месте сближения этой слитой жилки с радиусом. За вероятность этого предположения говорит тот факт, что у многих современных стрекоз как раз этот участок косты от узелка до конца ее представляется сильно расширенным, иногда почти вдвое против первоначальной ширины косты до узелка, например, у обыкновенной *Libellula depressa*. Далее у *Pholidoptilon camense* имеется характерное для стрекоз основное поле, лишенное поперечных жилок и ограниченное с внешней стороны, так же как и дужкою, ответвлением медианной жилки от суммы радиуса и медианной (R + M). Этот участок медианной (на фиг. 2 a — b) плюс поперечная жилка (b — c) я и гомологизирую с дужкой (arcula), а первую и вторую ветви медианной (M_1 и M_2) с секторами этой дужки. Затем в пользу сближения *Pholidoptilon camense* с *Odonata* говорит еще присутствие между кубитусом (Cu) и анальной (An) крылового треугольника (t), столь характерного для стрекоз; правда, он не велик и не так развит, как у современных форм.

Сначала меня несколько смущал отпечаток нижнего края крыла. Кажется, что по нижнему, т. е. заднему краю крыла пробегает жилка, и даже в основной части намечается как будто продолжение мембраны за ее пределы. Но при изучении крыльев современных форм я увидел, что по заднему краю их пробегает, если не настоящая трахеальная жилка, то во всяком случае ложная, и за пределами ее в основной части очень часто находится небольшая пленочка — membranula, так что и с этой стороны наличие заднекраевой жилки говорит лишь за родство *Pholidoptilon ca-*

mense с одонатами. Для того, чтобы быть вполне уверенным в своем предположении, я приготовил искусственный отпечаток на глине крыла обыкновенной *Libellula depressa* и получил совершенно тождественный по характеру отпечаток заднего края крыла.

Все эти данные, по моему, дают возможность сблизить *Pholidoptilon camense* с *Odonata*, но присутствие некоторых характерных отличий, как прекостальное поле и прекостальный выступ (P), а также его большая древность говорят за отнесение его к самостоятельному отряду. Кстати сказать, присутствие прекостального поля может давать повод к предположению некоторого родства с *Protorthoptera*, а жилка P вместе с продолжением говорит за родство с *Ephemeroptera*. Может еще возникнуть вопрос об отнесении этой формы к отряду *Protodonata*, но ничтожность сходства с его представителями совершенно исключает возможность такого предположения.

На основании этого мне кажется возможным выделить *Pholidoptilon camense* во вполне самостоятельный отряд *Permodonata*. Повидимому этот отряд существовал совершенно обособленно от *Protodonata* и является скорее истинным предком современных стрекоз (*Odonata*). По всей вероятности *Protodonata* и *Permodonata* являются параллельными ответвлениями одного общего корня, *Permodonata* впоследствии дали сохранившийся доныне отряд стрекоз (*Odonata*), *Protodonata* же вымерли, и предположение Brongniart'а о происхождении от них одонат является с нахождением *Pholidoptilon camense* весьма сомнительным. Окончательное решение этого трудного вопроса, конечно, надо предоставить времени, когда новые находки, будем надеяться, прольют на это свет.

Орел. Июль 1930 г.

G. ZALESSKIJ (G. ZALESSKY). OBSERVATIONS SUR UN NOUVEL INSECTE LIBELLULOÏDE DU PERMIEN DU BASSIN DE LA KAMA

RÉSUMÉ

En été 1929 dans le bassin de la Kama, près du village Tikhiie Gory, M. D. Zalessky et ses collaborateurs ont recueilli une petite collection de débris d'insectes fossiles. Cette collection m'a été remise par M. D. Zalessky pour son étude scientifique. L'échantillon de cette collection que nous décrivons dans cet article paraît être un reste du représentant tout à fait nouveau d'insectes libelluloïdes.

La provenance exacte du fossile doit être inscrite ainsi: le bord droit de la Kama, près de Tikhiie Gory, horizon à conchifères de l'étage Kazanien, Permien supérieur.

Ordre **Permodonata** G. Zalessky

Fam. **Pholidoptilidae**

Pholidoptilon camense G. Zalessky n. g. et sp.

L'émpreinte negative de la surface inférieure du fragment de l'aile antérieure du côté gauche. La longueur de l'empreinte 51 mm et la largeur 12 mm. L'aile est de forme allongée et se présente dans la partie basilaire fortement gaufrée en direction longitudinale. L'aile est déchirée dans la direction longitudinale et la portion de la partie inférieure de l'aile est repoussée et se trouve située dans un autre plan que la grande partie de l'empreinte et superposée en partie sur la portion supérieure de l'aile.

A la base même de l'aile on voit une saillie précostale arrondie, limitée par une nervure spéciale disparaissant avant d'atteindre au costa (voir la figure 2 P). Le champ précostal étroit se terminant avant d'arriver à la moitié de l'aile vient de cette saillie précostale. Le costa (C) et le subcosta (Sc) se croisent à la fin du second tiers de l'aile de sorte que le subcosta après le croisement va le long du bord marginal et le costa va à peu près parallèlement à celui-ci et bientôt les deux nervures se soudent en formant une lame rayée par des hachures transversales (St). Un peu avant d'atteindre le croisement le subcosta donne le secteur (Sec). La nervure longitudinale suivante (R + M) paraît être vraisemblablement le radius (R) et la médiane reunis. Bientôt elle se ramifie. La médiane à son tour donne des ramifications M_1 et M_2 et la dernière d'elles — une nervure M_3. Plus loin s'avancent: la nervure cubitale basse (Cu) et la nervure anale qui donne une branche en forme de zigzags. Les champs costal et subcostal sont divisés par une série de nervures. Entre le R et le Cu et entre le R et la première médiane (M_1) il n'y a pas de nervures transversales. Les autres portions de l'aile ont un réseau de nervures formant des cellules irrégulières. Toute la surface de la membrane était colorée, comme on le voit bien sur l'empreinte de l'aile, et seulement dans la partie distale de l'aile, où des taches claires se trouvent entre les cellules, elle était tout à fait transparente. A cause de la surface tachetée de l'aile je donne à notre fossile la nomination générique *Pholidoptilon.*

Quant à la position systématique de cette aile je la place près de l'ordre *Odonata* en se fondant sur les données suivantes. Le plissage longitudinal, la gaufrure de l'aile caractéristique pour les libellules (demoiselles) paraît avoir avant tout une ressemblance avec cet ordre. La portion du subcosta (Sc) à partir de son croisement avec le costa (C) jusqu'au secteur du costa (Sec) j'homologue avec le nodulus des libellules en considérant le secteur comme le secteur subnodal.

Une plaque formée par l'union du costa avec le subcosta peut être identifiée avec le pterostigma (St). Outre cela *Pholidoptilon camense* possède un champ basilaire, caractéristique pour les libellules, privé de nervures transversales. Ce champ est limité du côté extérieur ainsi que l'arculus chez les libellules par une portion de la médiane (a—b) et par une nervure transversale (b—c); j'homologue l'ensemble de ces nervures (a — b — c) avec l'arculus et les deux nervures médianes (M_1 et M_2) avec le secteur de ce dernier. Ces particularités permettent de rapprocher le *Pholidoptilon camense* aux *Odonata*. La présence du triangle de l'aile (t) entre le cubitus (Cu) et la nervure anale (An) si caractéristique pour les libellules parle aussi en faveur de ce rapprochement. Mais la présence de quelques distinctions caractéristiques, comme du champ précostal, de la saillie précostale (P), ainsi que la grande ancienneté de notre fossile parlent pour son attribution à l'ordre indépendant de *Permodonata*. La présence du champ précostal donne lieu à supposer certaine affinité avec les *Protorthoptères* et la nervure P avec sa continuation parle en faveur de l'affinité avec les *Ephemeroptera* (g. *Palingenia*). Une autre question peut se présenter encore—c'est l'attribution de cette forme à l'ordre *Protodonata*, mais le peu de ressemblance avec leurs représentants exclut la possibilité de cette supposition. Apparemment l'ordre *Permodonata* existait séparément de l'ordre *Protodonata*, et ces deux groupes représentaient des branches parallèles du tronc commun. Les *Permodonata* dans la suite ont donné l'ordre des libellules (*Odonata*) qui existe jusqu'à présent et les *Protodonata* moururent. La supposition de M. Charles Brongniart sur l'origine des Odonates de ces derniers après la trouvaille du *Pholidoptilon camense* parait être douteuse.

Orel, Juillet 1930

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

A TRUNK OF MAMMOTH (*ELEPHAS PRIMIGENIUS* BLUM.) FOUND IN THE KOLYMA DISTRICT (SIBERIA)

By C. FLEROV

In 1924 a well preserved mammoth trunk was found by an unknown Tungus in the everfrozen soil on the banks of the Bolshaya Baranikha River in the Kolyma district. This region is very distant from any inhabited place, devoid of regular means of communication and peopled with half-wild tribes. Five years elapsed before the news of a discovery, so exceptionally interesting for the Science, reached by a good chance some of our geologists working in the Kolyma district. The trunk in this time passed from person to person, its tip was cut off, then dried and the rest was thrown away and lost. Only in 1929 the dried tip of the trunk was handed over by Mrs. Kondratiev, a resident of Sredne-Kolymsk, a little town on the Kolyma River, to Mr. K. J. Pjatovsky, a geologist, who sent it to the Zoological Museum of the Academy of Sciences through Mr. M. J. Tkatchenko, an assistant of the Yakutsk Museum. In order to elucidate the peculiar circumstances relating to the discovery of the trunk, I cite here a letter of a member of the North-Eastern Yakutsk Expedition, Mr. V. A. Vakar:

«The tip of a mammoth's trunk, forwarded to the Zoological Museum of the Academy of Sciences by the Expedition of the Yakutsk Mining Trust, was found on the banks of the river Bolshaya (probably Bolshaya Baranikha) discharging itself into the Arctic Ocean somewhat west of Chauna-Bay. Owing to the lack of competent specialists in the Kolyma district no one attached any importance to this discovery. Having undergone long wanderings the tip of the mammoth's trunk was installed in 1929, among other curious knick knockery, as a decoration, on the table of Mrs. Kondratiev. That very year (1929) when our expedition was visiting the Kolyma district, there arrived from Yakutsk the manager of the Social Insurance Cash Mr. Emetz, who happened to put up at the apartment,

where the trunk was kept. Having often heard from us, that we were not only making geological and economic investigetions, but are also searching for fossil animals, he took notice of this extraordinary adornment of Mrs. Kondratiev's table and informed us of it. At first Mrs. Kondratiev was quite willing to present it to the Expedition, but later when many members of various expeditions and other travellers began to visit her, manifesting their intense interest in the trunk, Mrs. Kondratiev imagined, that she was losing a thing of great value, and began to set up all kind of obstacles. Only after many a visit to her paid by Mr. K. J. Pjatovsky and me and urgent persuading Mrs. Kondratiev agreed at last to hand it over to us. On arriving at Yakutsk we gave the trunk to Mr. M. I. Tkatchenko of the Yakutsk Museum, asking that it should be sent over to the Zoological Museum of the Academy of Sciences».

As the tip of a mammoth's trunk has as yet never been known, so that this discovery is the first, I consider it necessary to publish a preliminary description of the trunk at once. I take the opportunity to express my gratitude to Mr. K. J. Pjatovsky, Mr. V. A. Vakar and Mr. M. I. Tkatchenko, owing to whose cares this highly interesting object has reached our Zoological Museum.

The bit of a mammoth's trunk which we received (table I and II), has a total length of 28 cm (on its outer side measured with a tape)[1] and is completely dried up and somewhat deformed. Its general colour is dark greyish-brown, the inner side being darker than the outer one. The outer side, where the preservation of its skin is best, namely the upper and the left portion, approximates as to its tint Saccardo's Umber (Ridgway, Colour Standards and Colour Nomenclature, 1912, pl. XXIX). Some separate sections on the upper part of the bit of the trunk and all its right side have, apparently, slightly decayed and are of a colour close to that of the inner side of the trunk. The latter is of a dirty brown tint similar to Chaetura Black (op. cit., pl. XLVI).

The hair-covering is completely absent, but when examining the outer side of the trunk with a lens, one may see small holes — the hair pores. These pores are of two kinds — the minute ones, equally distributed all over the outer surface of the trunk (about 5 to a square mm) and the larger ones (1 to a square cm). On the inner surface of the trunk and of its finger-like upper appendix the hair-pores are wanting. The lateral sides of the

[1] Other measurements are shown in the table of measurements above.

«lip» have the hair-pores of both kinds. Taking into consideration the great contraction of the trunk in drying up and supposing the dimensions of a mammoth's trunk to be approximately similar to those of an Indian elephant, it may be deemed that the density of the hair-covering on the outer surface of the trunk was about 2—3 hairs to one square mm. It may be concluded from the aforesaid, that the mammoth's trunk was rather densely covered

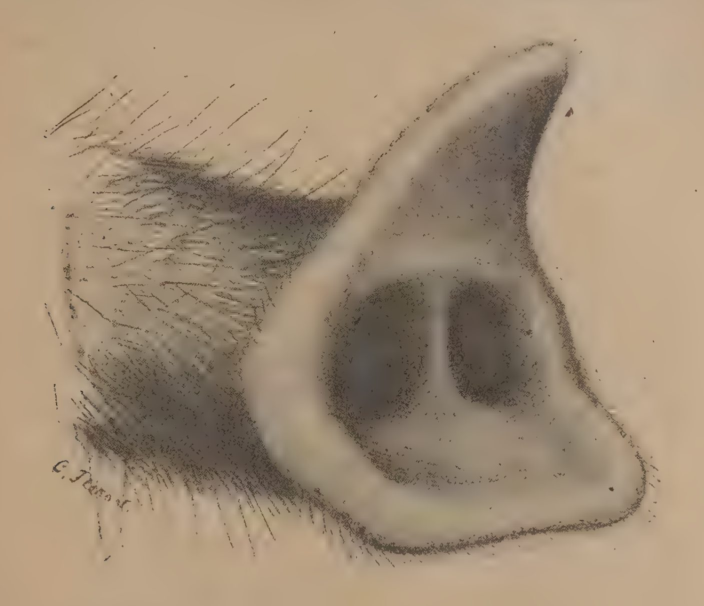


Fig. 1. Tip of trunk of the Mammoth (*Elephas primigenius*). Reconstruction.

with hairs of two kinds to its very tip. When comparing our data with these of Prof. W. W. Zalensky,[1] we obtain the following classification of the hair-covering of the trunk:

1) Thin (and probably short) hairs, densely covering the trunk — the under fur, after Zalensky.

2) Thick, sparse and comparatively long hairs with a diameter of the hair-pore measuring about 0.6 mm; considering that the trunk has shrinked

[1] Microscopical Investigations of some of the Organs of the Mammoth found on the Banks of River Beriozovka. The Scientific Results of the Expedition equipped by the Academy of Sciences for the Excavation of a Mammoth on the Banks of the River Beriozovka. S.-Petersburg, 1909, vol. II.

to about a half of its former dimensions, we obtain a diameter of about 1 mm, i. e. equalling that of the bristly hair after Zalensky.

The hair-covering was developed also on the outer side of the trunk and of the finger-like appendix, as well as on the sides, and on the lower extremity of the lip. The inner side of the tip of the trunk was either completely or almost devoid of hairs.

On the outer side of the trunk there may be seen traces of some transverse wrinkles, similar to those which occur on the trunk of our contemporary elephants (table II). The inner side is smooth (table I). In the cross-

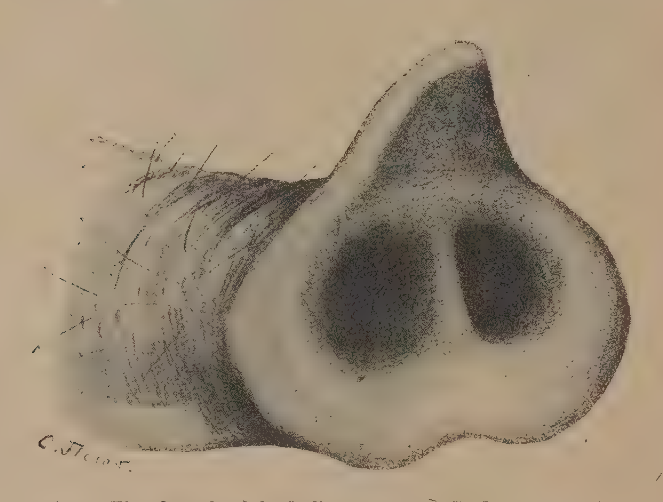


Fig. 2. Tip of trunk of the Indian elephant (*Elephas maximus*).

section the trunk has the same appearance, as that of the Indian elephant, the inner side is flat with well marked lateral bordering ridges, the outer side is semicircular. The end of the trunk is stretched gradually into a finger-like appendix (fig. 1) without any abrupt contraction observed on the trunk of the Indian and of the African elephants. This appendix is much longer and wider than that of the elephants (its length from the front end of the wall dividing both nasal openings to the tip is 9.5 cm along the bend). The cross-section of the finger-like appendix is of the same structure as that of the entire trunk. The lower mobile part («lip») is developed into a lobe, protruding so strongly, as to be noticeable even upon a considerably shrinked object. Its form is in general similar to that of the Indian elephant

(fig. 2) and has not the slightest likeness with the lower finger-like appendix of the African elephant (fig. 3). This lower «lip» is about twice as long as the lower margin of *Elephas maximus* and probably was a great deal more active. The distance from the upper wall of the external nasal foramina to the lower margin of the «lip» is 8.5 cm.

Thus a tip of a mammoth's trunk differs from that of *Elephas maximus* in that it seems to have been bilobed owing to the broad finger-like appendix and was an excellent organ for grasping.

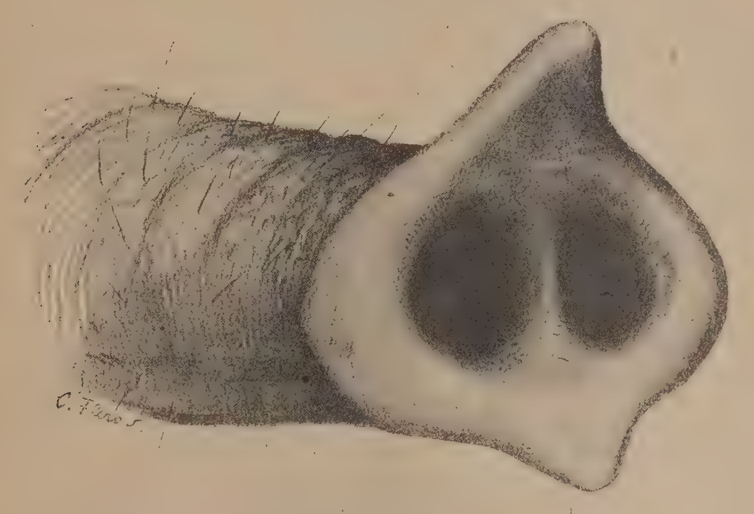


Fig. 3. Tip of trunk of the African elephant *(Loxodonta africana).*

This structure of the trunk of *Elephas primigenius* is confirmed in the drawings of the cave man, so, for instance, two large lobes terminating the trunk are distinctly represented in the drawing from the Combarelle cave (fig. 4). They are also reproduced in other drawings, wherever the tip of a trunk is represented. These drawings are, as it seems, of a very great importance, as the cave-man was extraordinarily keen at noticing the details of the physics of the animals, that served him as food.

If we consider now the structure of the mammoth's trunk with regard to its food, we shall see, that this marked development of the upper finger-like appendix and of the lower lobe is directly connected with its feeding habits. The stomach of the mammoth, discovered on the banks of the

Beriozovka River in 1901[1] was filled for the most part with the remains of herbs and, partly, with moss,[2] and really the mammoth, with a structure of its trunk, as described above, could undoubtedly pluck large bunches of grass and, particularly, moss with much greater ease than the Indian and African elephants can do, feeding mostly on branches and leaves of trees and bushes. In winter, when the mammoth had to feed upon branches of trees, it used its trunk in the same way as other elephants do.

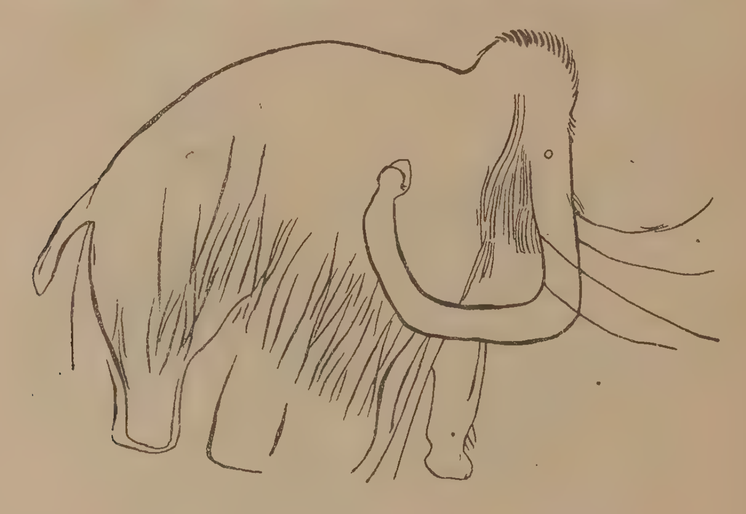


Fig. 4. Mammoth drawn by the cave-man in the Combarelle-cave.

As to the composition of the mammoth's diet, I fully agree with Prof. V. Sukachev's opinion that the mammoths fed upon grass in summer. I cannot however agree with this author, who does not admit, that the mammoth fed upon branches of trees and bushes. Such a huge animal could hardly dig a sufficient supply of food from under a frozen sheet of snow without any special appliances (similar to the reindeer's hoof). It is possible, that it could have partly dug up the snow with the help of its tusks and hoofs, still the greater part of the mammoth's diet in winter must have been composed of branches of trees and bushes. The statement is fully corrobo-

[1] Kept at the Zoological Museum of the Academy of Sciences.

[2] The description of plants, forming the summer diet of the mammoth, is given by Prof. Sukachev in The Scientific Results of the Expedition equipped by the Academy of Sciences for the Excavation of a Mammoth on the Banks of the River Beriozovka. S.-Petersburg, 1909, vol. III.

rated by all the previous discoveries of remains of coniferous plants in the mammoth's stomachs. We may then now more or less definitely say, that the mammoth fed in winter mostly upon arboreal vegetation and changed its diet for a herbaceous one in summer being in this respect in possession of an advantage over elephants of the present time in the form of its bilobed trunk.

TABLE OF MEASUREMENTS

	mm
Length of the tip of trunk on the external side	280
Maximal width	114
Width above the base of the «lip»	74
Width of the «lip»	71
Length of the finger-like processus	95
Width of the finger-fike processus on the base	57
Length of the «lip» on the exterior bord	36
Width of the right nasal opening	23
Width of the left nasal opening	17
Thickness of the wall dividing both nasal openings	6
Thickness of the skin on the exterior side	2
Thickness of the skin on the interior side	0.5

EXPLICATION OF THE PLATES

Plate I. The inner side of the Mammot's trunk.
Plate II. The outer side of the Mammoth's trunk.

К. К. ФЛЕРОВ. ХОБОТ МАМОНТА (*ELEPHAS PRIMIGENIUS* BLUM.), НАЙДЕННЫЙ В КОЛЫМСКОМ ОКРУГЕ

РЕЗЮМЕ

В 1924 г. на берегу р. Большой Баранихи, Колымского округа, неизвестным тунгусом был найден хобот мамонта. Пока весть об этой исключительной по своему интересу находке дошла из отдаленных, не имеющих правильных сообщений окраин до работавших в Колымском округе геологов, прошло много времени. Хобот переходил от одного лица к другому, конец его был отрезан, затем высушен, остальная часть была брошена. Конец хобота в высушенном виде был передан жительницей гор. Средне-Колымска Кондратьевой в 1929 г. геологу К. Я. Пятовскому, который через препаратора Якутского музея М. И. Ткаченко переслал его в Зоологический музей Академии Наук.

Сохранившийся остаток хобота (табл. I и II), сильно ссохшийся и деформировавшийся, имеет общую длину 28 см (при измерении лентой по внешней стороне);[1] Окраска его в общем темная, серовато-бурая, причем внутренняя сторона темнее наружной.

[1] Другие измерения помещены на таблице в конце статьи.

Волосяной покров совершенно отсутствует, при рассматривании наружной поверхности хобота в лупу видны небольшие отверстия — волосяные влагалища двух родов — мелкие (числом около 5 на 1 кв. мм) и более крупные (приблизительно по 1 на 1 кв. см). На внутренней стороне хобота и пальцеобразного отростка волосяные поры отсутствуют.

Тонкие (и вероятно сравнительно короткие) волосы, густо покрывающие хобот — по В. В. Заленскому, волосы подшерстка; толстые редкие волосы (более длинные), с диаметром влагалищ около 0.6 мм — щетинные волосы мамонта, по Заленскому.

На внешней стороне хобота (табл. II) видны следы поперечных морщин, подобных тем, которые имеются на хоботе современных слонов. Внутренняя сторона гладкая (табл. I). Сечение хобота такое же, как у индийского слона (*Elephas maximus*). Конец хобота постепенно переходит в пальцеобразный отросток, без резкого сужения, как у индийского и африканского слонов. Этот отросток значительно длиннее и шире, чем у названных слонов. Нижняя подвижная часть («губа») развита в целую лопасть, чрезвычайно резко выступающую даже на очень сильно ссохшемся объекте (фиг. 1). В общем, она имеет форму сходную с таковой индийского слона и не имеет даже намека на нижний пальцеобразный отросток африканского (*Loxodonta africana*, фиг. 3).

Таким образом, конец хобота мамонта, в отличие от таковго *Elephas maximus*, представляется как бы двухлопастным, благодаря широкому нижнему отростку, и был прекрасным хватательным органом. Подтверждение такого строения хобота мамонта мы находим на рисунках, сделанных пещерным человеком: так, например, на рисунках из пещеры Комбарелль (фиг. 4) ясно изображены две большие лопасти, заканчивающие хобот.

При сопоставлении строения хобота мамонта с составом его пищи, ясно, что это сильное развитие верхнего пальцеобразного отростка и нижней лопасти стоит в тесной связи со способом питания. Желудок мамонта, найденного на реке Березовке в 1901 г., наполнен, главным образом, остатками трав и отчасти мхом, и несомненно срывать большие пучки травы а в особенности мхов, имея вышеописанное строение хобота, мамонту было много удобнее, чем африканскому или индийскому слону, питающимся преимущественно ветвями и листьями деревьев и кустарников. Зимой же, когда мамонт должен был питаться древесными ветвями, он действовал хоботом подобно другим слонам.

Объяснение рисунков. Фиг. 1. Конец хобота мамонта (*Elephas primigenius*). Реконструкция. — Фиг. 2. Конец хобота индийского слона (*Elephas maximus*). — Фиг. 3. Конец хобота африканского слона (*Loxodonta africana*). — Фиг. 4. Рисунок мамонта пещерного человека из пещеры Комбарелль.

C. Flerov. A trunk of Mammoth (*Elephas primigenius* Blum.) found in the Kolyma District (Siberia)





ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

HETEROECIOUS AND ANOLOCYCLIC *ANOECIINAE*. ANOLOCYCLIC *LACHNINAE*

By A. MORDVILKO

(Présenté par N. Nasonov, *membre de l'Académie des Sciences)*

In most dissimilar groups of plant lice different heteroecious species and genera give origin to anolocyclic forms, when their primary hosts have vanished in some region or other.

Anoeciinae. Genus *Anoecia* Koch. Their primary host is the genus *Cornus*, namely some of the species of the section *Thelicrania* and of the subsection *Ablycarium* Köhne: *C. sanguinea* in Europe, *C. alba* L. (or *sibirica*) in Siberia and *C. macrophylla* Vally and, perhaps, other species — in Japan and China, *C. stolonifera* — in. N. America. *Anoecia* might have migrated upon *Cornus* (*Umbelliflorae*, to which *Cornaceae* also belong, are considered one of the most recent types of vegetation) only from more ancient plants, but we have not yet been able to indicate these plants, neither has it been possible for us to determine the systematic position of the genus *Anoecia* itself. The genus has some features of resemblance in common both with *Lachninae* (but its intestine is different from that of *Lachninae*; Mordvilko 1895; besides that, in *Anoecia* there are broad and low marginal tubercles) and *Pemphiginae* and, perhaps, even with *Callipterinae*, but I shall not dwell upon them at present.

Anoecia is an uncommon kind of plant lice that have become heteroecious although their fundatrices deform neither the leaves nor the shoots of *Cornus* and have not undergone any marked morphological changes, when compared with the wingless of the second and following generations. Their secondary hosts are the roots of *Gramineae* and, partly, those of *Cyperaceae (Carex, Eriophorum)*; but if, instead of them, there were the leaves or shoot tips of some other plants, then the *Anoecia* species would only obtain

new hosts and become an ordinary polyphagic species without any heteroecy (Mordvilko 1928).

There occur two species on *Cornus sanguinea* in Europe: *A. corni* Fabr. and *A. viridis* Börner. The former species is larger in size, its alate forms, both emigrants and sexuparae, have a greater number of secondary rhinaria on their antennae and, besides that, a large trapezoidal brown spot on the upper part of their abdomen; the latter species is a little smaller; the abdomen of its emigrants is green without a trapezoidal spot, and there are fewer secondary rhinaria on their antennae.

The life cycle of *A. corni* was examined by me a long time ago (1896, 1897, 1907), but it has not been completely ascertained even until now. By means of observation and experimenting I have established that «*Schizoneura*» *venusta* Pass., occurring on *Gramineae* roots, are but the exsules of *A. corni*. From spring on and early in summer, on young shoots, on the under surface of leaves and on floriferous parts there develop first brown wingless fundatrices with relatively short, 5-jointed antennae, 3-faceted eyes, more or less short legs and small cornicles; then, depending on the conditions prevailing in the habitat (on those of food suppley chiefly), there appear either alate emigrants immediately or apterous virgins with somewhat longer 6-jointed antennae, many-faceted eyes and longer legs and winged emigrants; in the 3rd generation there occur emigrants only, or wingless virgins may appear repeatedely in several generations, for instance, in moist shady places till the middle of July. The alate forms fly over to *Gramineae* and settle upon the collum of the taproot, suck and begin to lay larvae. Such is the beginning of a series of generations of exsules. The exsules mostly young, not quite full-grown apterous virgins, may even hibernate upon roots. Since August and later on there appear alate sexuparae resembling the emigrants in general appearance, they fly over to *Cornus* settling upon the under surface of its leaves. The sexuparae produce the bisexual generation, the latter suck, moult and reach maturity, pair, and the females crawl to shoots and stems, where they lay their eggs (every female lays at least two eggs) either under the scales of the bark or about the buds and cover them with short waxy threads secreted from their sides and especially from those of the 6th to 8th abdominal segments (somewhat similar to the way observed in many *Callipterinae*). The sexual forms are small, the male in particular (the female 1.06—0.58; 1.20—0.53; the male 0.85—0.28, 0.96—0.37).

On *Gramineae* roots there may appear not only sexuparae but alate virginiparae as well. The latter are morphologically distinctly different both from the emigrants and sexuparae. Namely while the sexuparae (1.95—0.96; 2.50—1.26) have from 11 to 15 transversally running rhinaria on the 3rd joint of their antennae, from 2 to 4 on the 4th, from 2 to 4 on the 5th and from 1 to 2 on the 6th, the 3rd joint being from 0.36 to 0.43 mm. long; the alate virginiparae (1.64—0.72; 2.08—0.96) have 4 to 9 rhinaria on the 3rd joint, from 1 to 3 on the 4th, from 1 to 4 on the 5th and 1 on the 6th, the 3rd joint being but from 0.23 to 0.28 mm. long. The alate virginiparae may appear early in summer, for instance, already at the time when the emigrants are flying over to *Gramineae*, but they may also occur later. It appears that they have first to migrate to other *Gramineae* in order to lay their progeny after sucking, but they may perhaps lay the latter on the spot. Ants usually tear off their wings, as they do it in case of the emigrants settling on the collum of roots.

From the vicinity of Tara in the district of Omsk (West Siberia) was furnished a colony of exsules from the roots of a cereal consisting both of wingless virgins and females, no males occurring in it, perhaps by chance. The females were smaller than the virgins (1.88—1.30; 2.22—1.37), but much larger than the females developing on the under surface of *Cornus* leaves: they were from 1.74 to 1.84 mm long and from 0.99 to 1.06 broad, brown, with 6-jointed antennae (those of the females from *Cornus* are mostly 5-jointed, rarely 6-jointed), the 3rd joint (from 0.15 to 0.17 long) is but twice as long as the 4th and only a little longer than the 6th; they had but permanent rhinaria, one to each of the two last joints; their eyes were 3-faceted and the sides of the 6th to 8th abdominal segments represented large glandular areas. Each female contained four eggs at least. No doubt, sexual forms may be discovered in other localities as well. How do they appear upon roots? Sometimes, when collecting exsules in August and September, one may, judging by the antennae at any rate, come upon alate sexuparae, the wings of which have been bitten off by ants. Of course, such sexuparae can lay their progeny only upon roots. But if it be so, the following experiment may be feasible in August-September: after collecting newly born females and males from *Cornus* leaves they should be placed upon the roots of a cereal, *Agropyrum*, for instance, or some other. It is evident that they will develop on the roots as well. The eggs laid on roots

must be taken in charge by ants, *Lasius flavus*, for instance, and in spring larvae of fundatrices may develop from them. Can these larvae suck roots and develop on them? The question may be solved in the following way: in May and early in June the brown fundatrices larvae of *A. corni*, that have not yet moulted, should be collected from *Cornus* shoot tips or leaves and then placed upon *Gramineae* roots. In general the larvae of fundatrices cannot develop upon secondary hosts, but in *Anoecia* these larvae differ comparatively slightly from those of other virgins, and the question concerning them may be solved but experimentally.[1]

Together with *Cornus sanguinea*, *C. alba*, *C. macrophylla*, *Anoecia corni* is distributed almost all over Europe, in the Caucasus, Siberia, Japan and, probably, in China; the exsules of this species, however, occur on *Gramineae* roots also in places, where *Cornus* is not to found, for instance, in Turkestan (*Cornus australis* occurs only in the mountain range Kopet-Dag), in Egypt, in the easten approaches to the South Ural Range, in Formosa (Takahashi 1925, IV, p. 45) and in various other localities, there the exsules of *A. corni* represent an anolocyclic form, which speaks for the former existence of *Cornus sanguinea* or some other species in these localities, for instance, in Turkestan and Egypt when the climate there was moister, in Formosa, when the climate there was more temperate than at present. *Cornus* existed in Java during the tertiary time (Potonié 1921). At a y rate, *A. corni*, occurring on roots is rather resistive to cold and it may be possibly discovered in Kamchatka and the peninsula of Kola etc., but as yet we have not attained any data on the subject.

It should be mentioned that *Cornus sanguinea* and *Anoecia corni* together with it have been imported into different localities of the United States of N. America (Wooster, Ohio, for instance) from Europe; that is why this species occurs now there together with the endemic North-American *A. cornicola* Walsh.

Anoecia viridis Börner (1916). In Europe in some places (Bavaria, Metz, Warsaw) a green *Anoecia* has been observed (its nymphs and alate emigrants are of this colour), usually in company with *A. corni*. The emigrants (1.50—0.68) have on their 3rd antennal joint 6—8 rhinaria, on the 4th 1—2, and on the 5th and tha 6th only permanent ones (one to

[1] In a letter (from the 6 of May 1931) J. Zirnits informs that fundatrix larvae do not suck the roots of *Agropyrum* and other *Gramineae*.

each joint); the 3rd joint (0.21) surpasses twice or a little more than twice the 4th. The larvae laid by the emigrants suck on *Gramineae* roots, on *Agropyrum intermedium* root stocks for instance, but besides that nothing else is known. It is, however, evident that its life cycle is the same as in *A. corni;* only this species is obviously less resistive to cold than the latter, at least it is not to be found on *Cornus* in Bialovej, about Leningrad, in Latvia although it may probably live out there on the roots of *Gramineae*. In Latvia (in the environs of Césis, formerly Wenden) J. Zirnits used to find fuscous exsules of a smaller species of *Anoecia*, on *Gramineae* and *Carex* roots; in September-October, besides wingless virgins there occurred also females, even small males and eggs. The apterous virgins (1.54—1.00; 1.97—0 96) may be comparatively readily distinguished from those of *A. corni*: their 3rd antennal joint (0.16—0.19) is but from $1^2/_3$ to twice as long as the 4th and either equals or only slightly surpasses the 6th in length; they have but permanent rhinaria, one to the 5th and the 6th joints; their eyes are 3-faceted tubercles with from one to several facets added in front. Their hairs are ussually setiform, in some specimens, however, among these there sometimes occur hairs dilated and forked at the tip.[1] As to the females they are much like those of *A. corni* from the *Gramineae* roots. Their dimensions are almost the same (1.57—1.06), but the 3rd joint (0.14—0.17) of their antennae is but from $1^3/_4$ to $1^5/_7$ times as long as the 4th and almost equals the 6th in length. The sides of the 6th—8th abdominal segments represent large glandular fields. The males also distinguish from those of *A. corni:* their 3rd antennal joint surpasses less than twice ($1^1/_2$—$1^2/_3$) the 4th and a little – the 5th (e.g. the antenna 0.52(0.066, 0.066, 0.16, 0.106, 0.13[= 0.097 + 0.033]); 0.52-(0.066, 0.066, 0.165, 0.10, 0.13), while in the males of *A. corni* (from *Cornus*) the 3rd joint surpasses at least twice the 4th and somewhat also the 5th (e. g. 0.46 (0.05, 0.05, 0.165, 0.08, 0.12 [= 0.08 + 0.047]); 0,06, 0.06, 0.18, 0.086, 0.15 [= 0.11 + 0.04]). From eggs, kept by Mr. Zirnits in a test-tube, there hatched in April some fundatrices larvae (0.80—039; 0.82—0.36) differing slightly from those of *A. corni* (0.75—0.30) collected on *Cornus*: their 3rd antennal joint almost equals the 4th and is much shorter than the 5th (e. g. the antenna 0.29 (0.04, 0.05, 0.06, 0.053, 0.09

[1] Probably Theobald's *Forda furcata* 1929, v. III, p. 178 belongs to this species. Theobald gives the picture of a young specimen with 5-jointed antennae.

[= 0.057 +- 0.033]); 0.28 (0.04, 0.05, 0.056, 0.053, 0.10), while in the fundatrices larvae of *A. corni* the 3rd antennal joint obviously surpasses the 4th (e.g. the antenna 0.25 (0.04, 0.04, 0.053, 0.033, 0.086 [= 0.06 +- 0.026]); 0.24 (0.04, 0.04, 0.053, 0.033, 0.07 [= 0.05 +- 0.02]). The further lot of the fundatrices larvae of this species has, however, remained unknown. Can they develop on *Gramineae* roots[1] or they are able to do so only on young shoots, leaves and floriferous parts of *Cornus?* At any rate, I consider these smaller *Anoecia* exsules as the exsules of *A. viridis* B. Similar ones were collected by me in Poland (Kielce, Warsaw). The sexuparae of *A. viridis* have not been determined. Of course, sexuparae might be found on *Cornus* leaves in autumn about Warsaw and, perhaps, in Latvia and even in Leningrad. They are sure to have a trapezoidal brown spot on the abdomen like that in the American species *A. cornicola*; but their antennae and body size may differ. Perhaps, some small *Anoecia* sexuparae, collected in August 1929 on *Cornus* leaves in Mozyr (govern. Minsk) may prove to belong to *A. viridis*: 1.57—0.72; 1.74—0.79; their antennae 0.80 (0.06, 0.066, 0.26, 0.10, 0.106, 0.16 [= 0.12 +- 0.04]); 0.82 (0.066, 0.066, 0.28, 0.10, 0.12, 018 [= 0.13 +- 0.046]); 0.83 (0.07, 0.07, 0.29, 0.106, 0.11, 0.18 [= 0.14 +- 0.04]); the 3rd joint has from 9 to 10, sometimes 11, rhinaria, the 4th 3—4, the 5th 3—4, the 6th 2. The sexuparae of *A. viridis* may occur on *Cornus* in Latvia and about Leningrad as well, but there are doubts as to the hibernation of eggs laid by females on *Cornus* in these localities. *A. viridis* even in Latvia is, probably, an anolocyclic form. As it may be seen, *A. viridis* should be more accurately studied. The distribution of its anolocyclic forms should be determined.

Anoecia cornicola Walsh. This North-American species is closely related to *A. viridis* Börner: its alate emigrants have a green abdomen and have no trapezoidal spot on the upper side of the abdomen; but there are still fewer rhinaria on their antennae than on those of *A. viridis*, namely, from 2 to 4 on the 3rd joint, and only one on each of the other. The fundatrices have 5-jonted antennae and are without cornicles. They develop on *Cornus stolonifera* since spring; the emigrants fly over to *Gramineae* roots, whence the exsules have formerly been described, probably, under the names of *Schizoneura panicola* Thomas and *Sch. venusta* Pass., as formerly the exsules of

[1] In a letter (from the 6 of May 1931) J. Zirnits informs that these larvae feed on *Agropyrum* roots and grow.

both species *A. cornicola* and *A. corni* should have hardly been distinguished in that country. The exsules of *A. cornicola* have been described by A. Baker (1916) under the name *A. querci* (= *A. cornicola* Walsh). The sexuparae of *A. cornicola* are readily distinguished from those of *A. corni*, by a minor number of rhinaria, in particular they have from 5 to 9 on the 3rd joint of their antennae, 2 on the 4th, from 2 to 3 on the 5th and 1 on the 6th. Then as the sexuparae of *A. cornicola* as well as those of *A. corni* in Europe occur late in summer and autumn upon leaves of various trees and on oaks among them, it has been supposed as M-rs E. Patch judiciously believes (expressed in a letter), that there also occurs a peculiar species on oaks (*A. querci* Fitch?). But I have not been able to obtain a spring and early summer generation collected upon oaks from anybody, and it is probable that there exists no peculiar oak *Anoecia* species nor can *A. cornicola* live on oak. The life of *A. cornicola* upon roots has not been sufficiently studied. The existence of anolocyclic forms has not yet been determined.

Another North-American species from *Carex* roots, provisorily registered by Th. Pergande as *Anoecia caricis*, is closely connected with the 3 species mentioned above, but has been as yet nowhere described. It may keep its name. Only its exsules, apterous and alate, are known. The processus terminalis of the last antennal joint is, as in the species above, rather long about from $^1/_3$ to $^1/_2$ of the length of the proximal part of the joint. Their hairs represent a very peculiar feature: they are rather long, stiff and terminate in a notched plate. The 3rd antennal joint of the apterous exsules has from 0 to 1 rhinaria, the 4th and following joints have a rhinarium each. The back is dark. The alate have from 4 to 6 rounded rhinaria on their 3rd antennal joint (0.23—0.25), from 2 to 4 on the 4th, from 2 to 3 on the 5th, and from 2 to 3 on the 6th. *Anoecia caricis* is, at any rate, in the Northern and Middle United States, an anolocyclic form, as its primary host is lacking there. Perhaps, its primary host exists in the Southern States or Mexico.

In *Anoecia pskovica* Mordvilko (1921) only root forms-apterous virgins and femals have been known until now. From all the other *Anoecia* species *A. pskovica* differs in its very short processus terminalis of the last antennal joint, it is from $^1/_9$ to $^1/_6$ of the length of the proximal part of the latter. They are rather large lice (from 2.00—1.10 to 2.40—1.50), milk white, slightly covered with powder, with 3 faceted eyes and rather long antennae, the 3rd joint (0.40—0.55) of which is almost as long as all the 3 following

ones taken together. There are: 0—1 rhinaria on the 3rd joint, from 1 to 3 on the 4th, 1—2 on the 5th and 1 on the 6th. The dimensions of the females are from 2.2—1.26 to 2.56—1.44 mm. There is a large glandular area on the sides of the 6th — the 8th abdominal segments. They have 1 rhinarium on their 3rd antennal joint, 2—3 on the 4th, 1—2 on the 5th and 1 on the 6th. They have been collected on *Carex* and *Eriophorum* roots and have as yet been reported from the following localities: the environs of the borough Petchory in the former province of Pskov, the neighbourhood of Césis in Latvia, the environs of Kieff, East Prussia and Great Britain (in the latter by Theobald 1929, III, p. 90). They have been collected only in autumn (August-October) and there have occurred virgins and females in every collection, in one of them, from the environs of Césis 3 small males have also been discovered. J. Zirnits writes in a letter, that the females lay their eggs on *Carex* roots and cover them with a dense white down, their further lot has not been determined. Of course, *A. pskovica* is an anolocyclic form at least in Northern and Middle Europe, perhaps, in South Europe too. Its primary host is unknown.

Lachninae. Genus *Trama* Heyden. Its most peculiar feature consists in the long tarsi of its hind legs; they are, strictly speaking, 2-jointed, but the first joint is rudimentary. These tarsi are almost as long as the femur. The mature apterous forms have secondary rhinaria on their antennae. The eyes are either many- or 3-faceted, small cornicles are either present or lacking. The intestine is similar to that of *Tuberolachnus Lachnus, Stomaphis* (Mordvilko 1895). Only wingless and alate virgins have as yet been discovered. They dwell on roots of *Compositae* and some other herbaceous plants: *Ranunculus, Rumex*. At present I can distinguish about 8 species from Palaearctic: *T. radicis* Kalt. (*Artemisia, Cichorium*), *T. delguercioi* Baker 1921 (n.n. pro *T. troglodytes* Guercio 1909) (*Carthamus, Hieracium, Cinara*?), *T. horvathi* Guercio (*Sonchus*, *Leontodon*, *Cichorium*), *T. ranunculi* Guercio (*Ranunculus*), *T. antennata* sp. n. (*Rumex*), *T. troglodytes* Heyd. (*Achillea*, *Artemisia, Sonchus* etc.), *T. caudata* Guercio (*Lactuca*), *Tr. rara* Mordv. 1908 (*Taraxacum, Helianthus tuberosus*, *Cichorium*, *Centaurea*). 7 species of *Trama* are known in Europe, 3 of them: *T. radicis, T. troglodytes* and *T. rara*, occur in Siberia too; a specimen of *T. radicis* has been discovered in the vicinity of Vladivostok. *T. ranunculi* has been found both in Italy and in Tunis. *T. antennata* has been found on *Rumex* roots in Turkestan

(Dushambe). In. N. America *Trama* has been discovered only in 1929—1930, namely in Colorado — *Trama oculata* Gillette-Palmer 1930. It lives there on *Taraxacum* roots and under stones with ants. This species is extraordinarily close to *Tr. rara* Mordv. *Trama* species are unknown in other regions. All the known species of *Trama* are anolocyclic ones[1], as their primary hosts are quite unknown, and it is uncertain whether there exist any at present somewhere in South Europe (the Balkan or Pyrenean peninsula), the South-East of Asia or in Africa, in N. America. If specimens of *Trama* should be anywhere discovered on shoot tips or leaves of some kind of trees or bushes, we should then learn what plants may be added to those that have vanished from Europe and Siberia.

Tuberolachnus viminalis Boyer de F. This species has been as yet found on some willows; on their branches it feeds sometimes in enormous colonies. It differs in various respects from *Lachnus* species collected on *Coniferae* and it has, therefore, been set up as a peculiar genus. The species is distributed almost without any variation all over Holarctic: North America, Europe, the Caucasus, Egypt, Turkestan, South Siberia, Mongolia, Japan Formosa, Punjab. During the summer of the year 1926 I succeeded in determining the life cycle of *T. viminalis* in the neighbourhood of Vladivostok. Either its alate virgins or nymphs appear to overwinter, as in May I discovered but a few winged virgins with their wings torn off (by ants), which were breeding their progeny. These virgins had hibernated somewhere (hardly upon shoots, sooner on the ground under the sheet of snow) and had emerged and crawled up to the willow shoots. In the environs of Warsaw, in September-December 1892, on willow shoots I observed but apterous and alate virginiparae, which remained upon the branches even when it had begun to freeze. Thus there is no bisexual generation on willows. If so, it is an anolocyclic form. But then, where may the primary host of *T. viminalis* be found? It may be a tree of the *Coniferae* or some tree or bush of the subtropical region. Perhaps, its primary host has entirely vanished.

---

[1] In *Trama ranunculi* Del Guercio 1909 (= *radicis* G. 1899) G. Del Guercio (1899) observed ovipositing females and apterous males. In my collections of *Trama radicis* Kalt., made in the vicinity of Leningrad in August—September of 1928 there occured several specimens of alate males. The fate of the eggs laid by *Trama* females on plant roots should be ascertained

А. К. МОРДВИЛКО. РАЗНОДОМНЫЕ И НЕПОЛНОЦИКЛЫЕ *ANOECIINAE.* НЕПОЛНОЦИКЛЫЕ *LACHNINAE*

РЕЗЮМЕ

В биологии *Anoecia corni* новые факты: обоеполое поколение не только на листьях *Cornus sanguinea* и др., но и на корнях злаков; однако, неизвестна судьба личинок основательниц на корнях. Вид дает неполноциклые формы; известны из Туркестана, Египта, Формозы и др. мест, где теперь нет *Cornus*, но где он раньше, очевидно, был при других климатических условиях. Для *A. viridis* описывается корневое поколение, на корнях же J. Zirnits в Латвии находил и обоеполое поколение и зимующие яички; он даже вывел из последних личинок основательниц и воспитал взрослых.

В С. Америке 2 вида *Anoecia: A. cornicola* Walsh, близкий к *A. viridis*, и *A. caricis* Pergande, Mordv. Последний вид — неполноциклый, описывается впервые. Первичный хозяин неизвестен. *A. pskovica* Mordv. в Европе — неполноциклая форма, первичный хозяин неизвестен. Некоторые данные по биологии.

Все *Trama* живут на корнях сложноцветных и некоторых других растений: в Европе 7 видов, наибольше на юге, 2 из этих видов — *T. troglodytes* и *T. radicis* также в Сибири, а *T. ranunculi* также в Тунисе; *T. antennata* sp. n на корнях *Rumex* в Туркестане; в С. Америке пока известен один вид *T. oculata* Gillette and Palmer (1930) на корнях *Taraxacum*, очень близок к *T. rara* Mordv. Все *Trama* — неполноциклые формы, и их первичные хозяева пока неизвестны, может быть, даже не существуют теперь. *Tuberolachnus viminalis* Boyer de F. на ветвях ив распространен во всей Голарктике. На ивах только девственницы—бескрылые и крылатые; зимуют крылатые. Вид неполноциклый; первичный хозяин неизвестен.

LITERATUR

Baker, A. The identity of *Eriosoma querci* Fitch. Ent. News, 1916, v. 27, p. 359.

Börner, C. Beiträge zur Kenntnis der wandernden Blattläuse. Mitt. aus d. K. Biol. Anstalt f. Land- und Forstwirtschaft, 1916, H. 16, p. 26 ff. (p. 36 *Anoecia viridis* B.).

Del Guercio, G. Contribuzione allo studio delle forme e della biologia della *Trama radicis* Kalt. Nuove Relaz. della R. Stazione di Entom. Agr. di Firenze. Vol. 1, pag. 195 ecc. 1899.

Id. Contribuzione alla conoscenza dei Lacnidi italiani. Redia. Vol. V, fasc. 2. Firenze, 1909 p. 248.

Gillette, C. P. and Palmer, M. A. Three new Aphids from Colorado. Ann. of. Ent. Soc. of America, 1930, 23, № 3, p. 543—549 (p. 547—548 *Trama oculata* n. sp.).

Mordvilko, A. Zur Anatomie der Pflanzenläuse, Aphiden. Zool. Anz., № 484, 1895.

Id. Beiträge zur Biologie der Pflanzenläuse. Biol. Centralbl. Bd. 27 1907, p. 747 f. (pp. 786—796).

Id. The Evolution of Cycles and the origin of Heteroecy (Migrations) in Plant-Lice. Ann. Magaz. Nat. History, Ser. 10, vol., 11. 1928, p. 570.

Theobald, F. V. The Plant Lice of Great Britain. 1929, III.

Tullgren, A. Aphidologische Studien. I. Arkiv för Zoologi, 1909, Bd. 5 (p. 186). — II. Meddelande № 280 från Centralanstalten för pörsöksväsendet på jordbruksområdet. Entom. avdeln. Stockholm, 1925, № 44, pp. 42—46.

Оглавление — Sommaire

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала.
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original.

Цена 2 руб. 50 к.